PIETRO GRECO

POVESTEA NUMĂRULUI π

HUMANITAS

POVESTEA NUMĂRULUI π

După studii de chimie, Pietro Greco s-a specializat în jurnalism pe teme ştiinţifice, fiind autorul a numeroase cărţi de popularizare, între care: *Evoluzioni* (1999), *Pianeta Acqua* (2004), *Einstein e il ciabattino* (2004), *La scienza e l'Europa* (apărută în mai multe volume între 2014 şi 2019). A condus un masterat de comunicare ştiinţifică la Şcoala Internaţională Superioară de Studii Avansate de la Trieste.

PIETRO GRECO

POVESTEA NUMĂRULUI π

Traducere din italiană
de Liviu Ornea

HUMANITAS
BUCUREȘTI

Redactor: Vlad Zografi
Corector: Grigore Vida
Coperta: Ioana Nedelcu
Tehnoredactor: Manuela Măxineanu
DTP: Iuliana Constantinescu
Prelucrare digitală: Dan Dulgheru

Tipărit la Art Group

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Greco, Pietro
Povestea numărului π / Pietro Greco;
trad. din italiană de Liviu Ornea. –
Bucureşti: Humanitas, 2019
ISBN 978-973-50-6554-6
I. Ornea, Liviu (trad.)
51

EDITURA HUMANITAS
Piaţa Presei Libere 1, 013701 Bucureşti, România
tel. 021/408 83 50, fax 021/408 83 51
www.humanitas.ro

Comenzi online: www.libhumanitas.ro
Comenzi prin e-mail: vanzari@libhumanitas.ro
Comenzi telefonice: 021/311 23 30

Cuprins

Argument

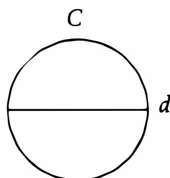
Sunt mulți ani de când mă persecută un anumit număr. E o persecuție plăcută, la care mai degrabă consimt fericit, nu-i sunt victimă lipsită de apărare, și totuși prezența ei e continuă, iminentă, sâcâitoare. Cine știe de ce, dar încă din vremea școlii primare toți mă asociază cu un raport *C/d*, dintre circumferința și diametrul unui cerc; mă asociază cu un simbol, π; și cu un număr: 3,14. De-atunci încă, de când aveam 6 ani și umblam în șpilhozeni, elevi și profesori, prieteni și cunoscuți, colegi și complet necunoscuți – toți îmi spun „pi greco"*. Cei care știu un pic de matematică îmi spun trei virgulă paișpe.

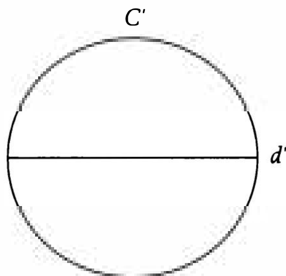
Și tot atunci, când aveam 6 ani și umblam în șpilhozeni, m-am hotărât să urmăresc pățaniile acestui număr fundamental: pentru viața mea, dar și pentru știință, dacă e adevărat, și e adevărat, că timp de cel puțin cinci milenii, zeci de mari matematicieni și-au cheltuit și continuă să-și cheltuiască o parte consistentă din timpul lor ca să găsească valoarea, natura și sensul lui pi. Descoperind că...

Descoperind că toate marile civilizații antice din toată lumea au înțeles foarte devreme că raportul dintre circumferința *C* și diametrul *d* ale oricărui cerc e egal cu o constantă.

---

* Joc de cuvinte: în italiană, „pi greco" (literal: „p grecesc") e pronunția numelui P. Greco. Titlul original al cărții este *Storia di π greco*, care s-ar putea deci interpreta și ca *Povestea lui P. Greco* (*N. t.*)





$$\frac{C}{d} = \frac{C'}{d'} = constant$$

Chiar dacă abia în secolul XVIII și-a primit acea constantă numele (fatidic pentru mine) și simbolul literei grecești π.

Deloc banală descoperirea strămoșilor noștri. Pentru că acel raport *C/d*, fix și universal, ne spune tuturor, de patru sau cinci mii de ani încoace, că lumea se sprijină pe o anumită ordine, iar această ordine e de natură geometrică. Ceea ce demonstrează că rațiunea umană are în geometrie un instrument cu adevărat puternic cu care să investigheze ceea ce grecii aveau să numească κόσμος (cosmos): întregul ordonat armonios.

Natura tocmai dezvăluită a raportului dintre circumferință și diametru pare înconjurată de o aură filozofică, iar aceasta ridică imediat constanta la nivelul unui parametru fundamental al universului și al cercetării raționale a realității. În plus, ne obligă să formulăm o serie de întrebări: care e natura acestui număr? Există cu adevărat ceva profund în constanta asta?

Întrebări abstracte, veți spune, de puțină utilitate practică.

Eroare. Ba nu, dublă eroare.

Prima: în cultura umană, întrebările abstracte și care nu par a avea vreo utilitate imediată s-au dovedit a fi, cu

timpul, marele motor al evoluţiei culturale, aşadar tehnologice, aşadar economice şi sociale. S-au scris multe cărţi valoroase despre „utilitatea inutilului“: ar fi inutil să mai discutăm despre aşa ceva, dacă nu s-ar întâmpla ca întrebările despre natura lui π să coroboreze semnificativ această teză. Vom reveni asupra chestiunii.

A doua: aceste întrebări fundamentale nu i-au împiedicat şi nu-i împiedică nici acum câtuşi de puţin pe ţărani, pe meşterii zidari, pe informaticieni să folosească acel număr în îndeletnicirile lor practice de zi cu zi. Şi cum acestea din urmă au nevoie de o anumită precizie, iată că se naşte o nouă listă de probleme (chiar) practice: cât e cu adevărat π? Care e valoarea exactă a raportului constant *C/d*?

Aceste două tipologii de întrebări, acelea (aparent) abstracte despre „natura“ lui π şi cele concrete despre „valoarea“ lui π, datează de mii şi mii şi mii de ani, intersectându-se uneori, alteori nu – în orice caz, de cel puţin cinci mii de ani sunt o componentă mereu prezentă şi mereu importantă în istoria matematicii şi, deci, în istoria noastră *tout court*.

Dar să nu uit. Întrebările acelea sunt, cel puţin în parte, încă deschise. π ne pune încă întrebări.

1. Înainte de Arhimede

ÎN MESOPOTAMIA

Babilonienii ştiau care e valoarea lui π sau, mai bine zis, dintre toate popoarele antice ei sunt cei care i-au calculat valoarea cu cea mai bună precizie înainte să sosească în Sicilia un anume Arhimede (cca 287–212 î.C.[1]). Iat-o:

$$\pi = 3{,}125$$

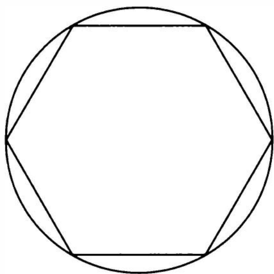
Valoarea nu e mult diferită de cea pe care o cunoaştem azi, dacă aproximăm la a treia zecimală:

$$\pi = 3{,}142$$

Dar asta nu-i totul. Babilonienii aveau şi o regulă pentru calculul lui π. O metodă în toată puterea cuvântului pe care, într-o primă aproximaţie, o putem considera asemănătoare cu metoda marelui Arhimede, chiar dacă el avea să o facă mult mai sofisticată: înscrierea unui poligon într-un cerc.

---

1. Nu cunoaştem cu exactitate data naşterii lui Arhimede. Cum nu cunoaştem data naşterii şi /sau data morţii pentru multe personaje pe care le vom cita. N-o să mai precizăm acest lucru de fiecare dată, pentru a nu îngreuna lectura. În acest context, important e să avem o idee despre perioada în care se petrec faptele şi acţionează personajele citate. (*N. a.*)



Toate acestea sunt însemnate în tăbliţa 7302 a Yale Babilonian Collection găsită la Susa, un oraş la 300 de kilometri sud-est de Babilon, unul dintre nucleele urbane cele mai vechi din lume (şi locuit de circa 7000 de ani), multă vreme capitală a regatului Elam. Azi oraşul se numeşte Shush, numără 54.000 de locuitori şi e capitala provinciei omonime din Iranul de vest. Tăbliţa 7302, veche de 4000 de ani, a fost găsită abia în 1936 şi de atunci a modificat destul de profund ce se ştia despre posibilităţile matematice ale vechilor locuitori ai Semilunei Fertile.

Apropo de aproximaţii: i-am pomenit pe babilonieni ca să indicăm toate populaţiile care, în timpurile străvechi, au locuit în Mesopotamia, teritoriul dintre cele două fluvii, Tigrul şi Eufratul. În realitate, pe parcursul câtorva milenii, aceste populaţii au fost numeroase şi cu origini diferite: unele de sorginte indoeuropeană, altele nu. Au fost sumerieni, akkadieni, amoriţi, casiţi, alamiţi, hitiţi, asirieni, mezi, perşi şi câte altele. Să le spunem, cu un singur nume, mesopotamieni. Chiar dacă istoricii se vor înfiora. Dar aproximarea nu e cu totul hazardată, pentru că între sumerieni şi succesorii lor a existat o importantă continuitate în privinţa culturii.

Şi ce cultură!

Mesopotamienii (sau, dacă vreţi, popoarele din Mesopotamia) au inaugurat, cel puţin în aceste regiuni mai

occidentale ale Eurasiei, civilizația urbană, întemeind nu doar Babilon și Susa, dar și multe alte orașe independente, printre care Eridu, Ur, Nipur, Larsa, Asur, Uruk, Lagash, Kish. Mesopotamienii au inventat scrierea. Astronomi dibaci, ei au fost cei dintâi care au studiat sistematic cerul. În fine, dar nu mai puțin important, au dezvoltat o matematică destul de sofisticată.

Matematica e unul dintre elementele de continuitate cele mai semnificative care au caracterizat civilizațiile mesopotamiene. Tocmai pentru că erau civilizații urbane, chiar dacă puternic dependente de economia agricolă care înflorea datorită inundațiilor neregulate, dar benefice, ale celor două fluvii. Primii matematicieni au fost sumerienii, o populație nici indoeuropeană, nici semitică.

Pe la 4000 î.C., în partea meridională a Mesopotamiei s-au așezat sumerienii și au întemeiat un regat cu capitala la Ur, una dintre cele mai vechi așezări urbane din lume. Nu ei au inventat agricultura, pentru că pe pământul dintre cele două fluvii arta cultivării plantelor se practica deja de milenii (de pe la 7000 î.C. sau chiar dinainte). O serie de inovații le-au permis totuși să înregistreze un autentic salt calitativ în tehnicile cultivării: de la aratul cu tracțiune animală până la noi și mai avansate sisteme de irigație și de construcție de canale.

În schimb, sumerienii au fondat civilizația urbană din Mesopotamia: orașe cu case, temple, edificii publice; un stat cu administrația aferentă; o economie foarte complexă, constituită inclusiv din negustorie și ateliere meșteșugărești.

Se întâmplă că, asemenea sistemului complex de irigații de la țară, civilizația urbană are și ea nevoie de ingineri și de geometri – precum și de reprezentanți ai altor profesiuni, de la negustori la agenți fiscali – capabili să utilizeze

numerele. Băgați însă de seamă: celor care contribuie la fondarea unei civilizații urbane nu li se cere numai să numere (asta, ne spun psihobiologii, o pot face și puii de găină). Cine construiește case, temple și rețele de canale de irigație, cine produce și vinde bunuri și servicii are nevoie să folosească numerele și formele într-o manieră mult mai sofisticată. Are de fapt nevoie de o matematică și de o geometrie mai degrabă avansate. Superioare celei a puilor de găină.

Chiar și organizarea traiului (în comun) al ființelor umane într-un oraș e o treabă mai complexă decât organizarea traiului (în comun) al puilor de găină în coteț. E mai complicat și decât să organizezi viața unor *sapiens* vânători și culegători în savană ori în pădure. Ca să trăiești în oraș – mai mult, ca să faci să funcționeze un oraș – e nevoie, printre altele, de o metodă de a înregistra și ține minte tot ce se întâmplă acolo. Altfel spus, e nevoie de scriere. Una peste alta, odată cu inaugurarea vieții în oraș apar noi exigențe sociale și economice importante și de neocolit: exprimarea lungimilor și greutăților într-o manieră exactă și acceptată de toți; schimbul banilor și produselor manufacturate; împărțirea moștenirilor și terenurilor agricole; distribuirea cotelor de recoltă între țărani, clerici și stat; calcularea taxelor de plătit; calcularea dobânzilor și chiar a dobânzilor compuse. Nu e de mirare deci că pentru a înregistra toate acestea și multe altele, sumerienii folosesc pictograme, prototipul scrierii cuneiforme, iar pentru socoteli folosesc un sistem matematic complex care depășește cu mult utilizarea numerelor elementare: un sistem în baza șaizeci, cu numărare pozițională. Pe scurt, sumerienii inventează *și* scrierea, *și* matematica.

Nu vorbim despre o scriere și o matematică banale. Cererea socială pentru rigoare și exactitate în prima civilizație

urbană edificată de sumerieni e de așa natură încât matematicienii lor învață să schițeze ceva asemănător teoremelor moderne: anume, elaborează propoziții care, cu un raționament riguros, de tip deductiv, pornesc de la anumite premise și ajung la concluzii necesare. Sigur, capacitatea de a crea teoreme aparține unui cerc restrâns de experți. Dar că nu doar o mână de membri ai elitei, ci întreaga populație sumeriană are o cultură matematică mai degrabă dezvoltată e dovedit de faptul că până și în mozaicurile templelor din orașele mesopotamiene apar anumite forme geometrice exacte.

Toți mesopotamienii sunt familiarizați într-o oarecare măsură cu numerele și cu formele geometrice. Matematica introduce ordine și precizie în haosul vieții. Ordinea și precizia sunt dezirabile, exprimând deci ceva ce am putea identifica drept „frumusețea lumii“, o frumusețe demnă de a fi recunoscută și reprezentată. Iată că, în formele geometrice ale mozaicurilor din case și din temple, sumerienii vor să surprindă și să reprezinte frumusețea (matematică) a lumii.

Pe la 2500 î.C., vechiul și cultivatul popor sumerian a fost înfrânt și supus de o populație de origine semitică, akkadienii, condusă de regele Sargon. Așa cum s-a întâmplat adesea în istoria umanității, rafinata civilizație sumeriană a supraviețuit forței brute a armelor și cuceririi militare. Mai mult, ea și-a atins apogeul cultural în jurul anului 2250 î.C. și a început să apună doar câteva secole mai târziu, sub presiunea unei alte populații semitice, amoriții, fondatori ai unei civilizații noi, aceea pe drept cuvânt numită babiloniană, pentru că-și avea centrul în orașul Babilon.

Schimbarea aceasta, din preajma anului 2000 î.C., generează totuși un nou proces de dezvoltare politică, economică și culturală, care-și atinge maximumul – unul foarte înalt – pe la anul 1750 î.C., odată cu Hamurabi, cel de-al

şaselea rege din prima dinastie babiloniană, autor al faimoasei culegeri de 280 de legi cunoscută, în mod firesc, drept „codul lui Hamurabi“.

Tocmai acestei perioade de schimbare şi dezvoltare îi aparţine tăbliţa 7302, cu calculul lui π.

Tăbliţele folosite de mesopotamieni pentru scriere nu sunt altceva decât platforme micuţe din argilă moale pe care, cu un stil (un fel de cui), sunt trasate simbolurile scrierii cuneiforme, evoluţie a pictografiei sumeriene. Odată incizate, tăbliţele se coc la soare sau în cuptor, fiind astfel transformate în foi, poate un pic cam grele, dar cu siguranţă în stare să reziste uzurii timpului: patru milenii s-au scurs între ziua în care un scrib a incizat (în limba akkadiană) şi cea în care un explorator a găsit tăbliţa 7302.

Sigur că 7302 nu e singura tăbliţă care documentează vechea civilizaţie mesopotamiană. E doar una dintre sutele găsite la Susa, toate datând de la sfârşitul mileniului III î.C. La rândul lor, cele de la Susa sunt doar unele dintre tăbliţele care documentează întregul arc al civilizaţiei mesopotamiene. Pe aceste foi de argilă sunt scrise o mulţime de lucruri, de toate felurile: legi şi legende, lecţii de şcoală şi scrisori personale, documente şi calcule matematice.

Tăbliţele de la Susa sunt deosebite pentru că ele conţin multă matematică. E vorba despre adevărate scheme de rezolvare a unor probleme, în general de natură algebrică. Ceva mai puţine de geometrie. Ca urmare, multă vreme s-a crezut că mesopotamienilor nu prea le plăcea geometria şi nici n-o prea cunoşteau. A stăruit mult printre cercetători ideea că ei stăpâneau bine calculul şi operaţiile aritmetice, de la fracţii până la puteri; ştiau să extragă o rădăcină pătrată – se ştie că ei calculaseră bine (cu o bună aproximaţie, deci) valoarea lui $\sqrt{2}$ – şi chiar o rădăcină cubică; ar fi cunoscut

algebra, ştiind să rezolve ecuaţii de gradul al doilea, ba se descurcau chiar şi cu cele de gradul al treilea; ştiau să rezolve sisteme algebrice de cinci ecuaţii cu cinci necunoscute. Una peste alta, la numere se pricepeau bine.

Dar se părea că la geometrie stăteau mai prost. Dintre toate tăbliţele găsite până în 1936, de exemplu, rezulta totuşi clar că mesopotamienii ştiau perfect că raportul dintre circumferinţa şi diametrul cercului e o constantă. Dar valoarea, 3, pe care o atribuiau constantei era o aproximare grosieră. De neexplicat, în primitivitatea ei, date fiind remarcabilele lor competenţe matematice.

De unde întrebarea: cum e posibil ca ei să ştie să calculeze cu foarte bună precizie valoarea lui $\sqrt{2}$ şi să nu poată calcula cu o precizie măcar acceptabilă valoarea lui π? Răspunsul părea limpede: le plăcea matematica, dar îi plictisea geometria.

Era totuşi un răspuns greşit. Pe măsură ce se descopereau tăbliţele, s-a înţeles că mesopotamienii erau foarte bine familiarizaţi cu geometria – de la teorema lui Pitagora până la definiţia triunghiurilor asemenea. Mai mult, erau geometri la fel de buni pe cât erau algebrişti. În fine, iată că în 1936 apare tăbliţa 7302, din care aflăm că mesopotamienii nu doar că ştiau o bună aproximare a valorii lui π, dar şi că acea valoare a rămas pentru două milenii cea mai bună aproximare cunoscută în toată lumea. Mai mult, acea tăbliţă demonstrează că mesopotamienii aveau o metodă pentru calculul lui π.

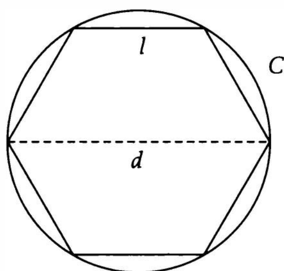
Metoda e, în linii mari, următoarea.

Să luăm un hexagon regulat înscris într-un cerc. Un procedeu foarte bun pentru a împărţi cercul în 6, iar apoi în 60 de părţi egale, introducând în geometrie aceeaşi bază sexagesimală aplicată matematicii. În treacăt fie spus, împărţirea

cercului şi a unghiurilor în 360 de părţi egale e folosită şi azi. Acele 360 de părţi puse în evidenţă de mesopotamieni se numesc astăzi grade.

Dar să ne întoarcem la figurile noastre.

E de ajuns să înscriem în cerc hexagonul ale cărui laturi sunt jumătatea exactă a diametrului cercului: $l = d/2$.



E clar că latura *l* a hexagonului e egală cu raza *r* a cercului, deoarece diametrul *d* al cercului e dublul razei *r*. Mesopotamienii ştiu că raportul dintre circumferinţa *C* şi diametrul *d* al cercului e o constantă (pe care noi o numim π).

Ştiu deci că:

$$\frac{C}{d} = \frac{C}{2r} = constant = \pi$$

Acum pot calcula raportul dintre circumferinţă ($C = 2\pi r$) şi perimetrul hexagonului ($E = 6r$):

$$\frac{E}{C} = \frac{6r}{2\pi r} = \frac{3}{\pi}$$

Mesopotamienii ştiau să calculeze şi raportul aproximat dintre latura hexagonului şi coarda pe care o subîntinde această latură pe cerc. Conform acestor calcule aproximative, raportul *E*/*C* e egal cu:

$$\frac{E}{C} = \frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2} = 0,96$$

Aşadar

$$\frac{E}{C} = 0,96 = \frac{3}{\pi}$$

Rezultă că:

$$\pi = \frac{3}{0,96} = 3,125$$

Iată deci că acum 4000 de ani matematicienii mesopotamieni găsiseră o valoare a lui π – şi încă una destul de precisă.

Dar oare inginerii, artiştii, negustorii, geometrii şi agenţii fiscali dintre Tigru şi Eufrat foloseau această valoare sau pe aceea mai simplă, anume 3, în aplicaţiile lor practice? Habar n-avem. E cert că civilizaţia mesopotamiană mai durează mult după anul 2000 şi ajunge la capăt abia în 538 î.C., când Semiluna Fertilă e cucerită de Cirus. Cu siguranţă, în acest mileniu şi jumătate schimbările n-au lipsit pe malurile celor două fluvii. Pe la 1000 î.C., de exemplu, a avut loc una destul de importantă, în urma introducerii noii tehnologii a fierului. Iar pe la 800 î.C. sosesc asirienii, care se stabilesc pe teritoriile de la nord de Tigru. Mai trece un secol şi-i vedem apărând pe caldeeni şi pe mezi, vecinii perşilor. În fine, în 538 î.C. sosesc chiar ei, perşii.

Ei bine, în tot acest timp şi pe parcursul atâtor schimbări, cultura mesopotamiană nu se modifică. Cel puţin nu în substanţa ei. Nu se modifică nici matematica. Cu menţiunea că, de la un moment dat încolo, începe să fie aplicată studiului cerului şi devine parte integrantă a astronomiei. Matematica asociată astronomiei devine şi baza unei alte

ştiinţe, aceea a calculării timpului, care le permite mesopotamienilor să elaboreze calendare destul de precise.

În sfârşit, iată că pe teritoriile dintre cele două fluvii ajunge Alexandru Macedon, care le şi cucereşte. La moartea sa, în 323 î.C., Mesopotamia e încredinţată dinastiei Seleucizilor. Dar suntem de-acum într-o nouă şi extraordinară perioadă culturală. Matematica mesopotamiană cedează locul celei elenistice, însă nu apune de tot: mărturii vii sunt conservate în Siria, cel puţin până la sosirea romanilor.

EGIPTENII

Istoria e frumoasă pentru că nu se repetă niciodată identic. Nici măcar istoria lui π. Problema 50 din papirusul găsit printre rămăşiţele Tebei antice de scoţianul Henry Rhind în 1858 susţine că aria A a unui cerc cu diametrul de 9 unităţi ($d = 9$) e egală cu aceea a unui pătrat cu latura l de 8 unităţi ($l = 8$).

$$A = \frac{1}{4}\pi d^2 = l^2$$

Cum $d = 9$ şi $l = 8$, deducem:

$$A = \frac{1}{4}\pi 9^2 = 8^2$$

Cu un calcul elementar, găsim acum valoarea lui π:

$$\pi = 4 \times \frac{8^2}{9^2} = 4 \times \frac{64}{81} = 3,160$$

Valoare care, după cum observa Petr Beckmann, unul dintre cei mai buni biografi ai lui π, e doar cu puţin mai proastă

decât cea obținută de babilonieni. Eroarea din papirusul de la Teba față de valoarea lui π cunoscută azi e, într-adevăr, de 5,7 la mie; în timp ce eroarea din tăblița de la Susa era de 4,8 la mie.

Dar când și cum a fost obținută această valoare pe malul Nilului?

Papirusul lui Rhind datează de prin 1700 î.C.: e deci doar un pic mai recent față de tăblița de la Susa. Totuși 1700 reprezintă o limită inferioară: ne spune că egiptenii știu să-l calculeze pe π de cel puțin 3700 de ani. Dar nu ne furnizează și o limită superioară. Așadar, când au învățat cu adevărat egiptenii să-l calculeze: cu un secol, trei secole, cu un mileniu înainte? Nu știm.

Nu știm deci dacă vreun egiptean anonim n-ajunsese la această valoare înainte sau după matematicianul anonim care a inspirat (sau scris) tăblița de la Susa.

De fapt, nu știm nici când s-a născut civilizația egipteană. Tot ce putem spune e că valea scăldată și inundată regulat de Nil, în partea sa superioară care corespunde Egiptului de azi, era deja locuită și cultivată cu mai bine de 6000 de ani în urmă. E, probabil, doar cu puțin ulterioară civilizației născute între cele două fluvii, Tigrul și Eufratul.

Nu e întâmplător că primele două mari civilizații din Orientul Mijlociu și din nordul Africii s-au născut în jurul unor fluvii bogate în apă și mâl. E totuși o diferență între Nil, pe de o parte, și Tigru și Eufrat, de cealaltă parte. Inundațiile fluviului african se produc cu regularitate cronometrică. Și cine știe dacă această regularitate n-a influențat într-o oarecare măsură și stabilitatea politică a Egiptului, care, spre deosebire de Mesopotamia, a cunoscut, spun istoricii, doar două faze și o unică invazie externă. Prima fază a civilizației egiptene se termină pe la anul 3500 î.C. și cuprinde două

mari regate: Egiptul de Jos şi Egiptul de Sus. Perioada se încheie odată cu faraonul Narmer, cunoscut şi ca Menes (?–3125 î.C.), care unifică cele două regate şi inaugurează ceea ce noi numim prima dinastie. O mie de ani mai târziu, odată cu a treia dinastie, Egiptul ajunge la apogeul splendorii sale. E epoca lui Keops (?–2580 î.C.) şi a altor faraoni care ridică piramidele: splendidele monumente care au rezistat aproape intacte uzurii timpului, lăsându-se admirate şi azi. Pentru a construi acele piramide, egiptenii aveau nevoie de arhitecţi rafinaţi, şi deci de o matematică destul de avansată. Iar din moment ce în acele piramide erau înmormântaţi faraonii înşişi, dar şi alte corpuri care, îmbălsămate, trebuiau să sfideze şi ele uzura timpului, e clar că egiptenii cunoşteau o chimie (sau, dacă vreţi, o alchimie) şi o medicină nu mai puţin sofisticate.

Civilizaţia Egiptului traversează un singur moment de mare dificultate în timpul invaziei hicsoşilor, între 1700 şi 1600 î.C., şi s-a înclinat numai în faţa lui Alexandru Macedon, în 332 î.C.

Cucerirea macedoneană e dintre acelea care despart epocile istorice. Vorbim despre un înainte şi despre un după Alexandru. Iar cele două perioade sunt foarte diferite. Într-adevăr, odată cu venirea lui Alexandru, în delta Nilului se naşte o nouă, extraordinară civilizaţie – cea elenistică –, fruct al contaminării cu civilizaţia greacă. Apare acum ştiinţa înţeleasă în sens modern, după cum bine a explicat matematicianul italian Lucio Russo în importanta sa carte *Revoluţia uitată*.

Pe scurt, Alexandru întemeiază un oraş, Alexandria din Egipt, care va fi, pentru cel puţin pentru 700 de ani, capitala mondială a unui tip de cercetare pe care nu ezităm s-o numim ştiinţifică. Dar despre asta vom vorbi mai jos. Acum să revenim la egiptenii antici.

La fel ca mesopotamienii, și ei inventează scrierea care e, și la ei, pictografică, aceea a celebrelor hieroglife. Probabil că această coincidență nu e fructul unei duble generări independente, ci al unui proces de difuzie culturală. Probabil că ideea de a scrie s-a născut din nimic (sau aproape) o singură și numai o singură dată în istoria umanității împrăștiate pe-atunci pe trei continente (Africa, Asia, Europa) și apoi s-a răspândit. Nu putem ști deocamdată unde a ajuns ideea la maturitate pentru prima oară: în Mesopotamia, în Egipt sau altundeva? Dar e cert că egiptenii scriu și că, tocmai începând cu 2500 î.C., modul lor de scriere hieroglifică evoluează către scrierea hieratică, în care un simbol nu mai reprezintă un cuvânt, ci o silabă.

Egiptenii scriau pe papirusuri, nu pe tăblițe, așa că mare parte din operele lor s-a pierdut. Foarte cunoscută e stela de la Rosetta, găsită în timpul unei expediții din 1799 a campaniei lui Napoleon. E vorba despre o bucată de granit pe care e săpat un același text din secolul II î.C. în trei grafii diferite – hieroglifică, demotică și greacă. Stela de la Rosetta a fost decisivă pentru descifrarea hieroglifelor și s-a dovedit extrem de utilă atunci când au fost găsite cele două „papirusuri matematice" principale, cel zis de la Moscova (pentru că acolo e păstrat) și cel al lui Rhind, cunoscut și ca papirusul lui Ahmes. Scrise în grafie hieratică, ambele datează din secolul XVIII î.C. și ambele propun o culegere consistentă de probleme matematice: 25 în cel de la Moscova, și chiar 85 în cel al lui Rhind.

Aflăm din aceste papirusuri că egiptenii știau foarte bine că raportul dintre circumferința și diametrul cercului e constant. Iar problema 50 din papirusul lui Rhind furnizează și o bună valoare a constantei: 3,16049.

Cum au ajuns la ea? O soluție ne e dată de problema 48. Nu intrăm în detalii. Să spunem numai că tehnica constă

în a înscrie un octogon într-un cerc cu diametrul de 9 unități. Egiptenii calculează aria octogonului și, cunoscând raportul dintre latura octogonului înscris în cerc și latura *l* a pătratului în care e înscris cercul, ajung să calculeze valoarea lui π cu o aproximație acceptabilă.

Așadar, egiptenii și mesopotamienii folosesc metode analoage – dar nu omoloage – pentru a calcula valoarea lui π: se bazează pe compararea unor figuri geometrice. Ceea ce e posibil odată ce sunt cunoscute principiile elementare ale geometriei, inclusiv calculul perimetrelor și al ariilor. Ambele popoare ajung la o valoare a lui π foarte apropiată de aceea „adevărată“. Și ambele știu că e vorba despre o aproximație, deci nu despre cea „adevărată“.

Iată cum π își distilează picătură cu picătură valoarea, dar își ascunde natura. Ambelor popoare π le apare drept fundamental și tot pe-atât de iluzoriu: e o constantă universală, un raport între entități geometrice elementare, circumferința și diametrul figurii celei mai simetrice, cercul, totuși nu poate fi exprimat printr-o valoare numerică bine definită. Ascunde oare dificultatea aceasta ceva mai profund?

2. Arhimede din Siracuza

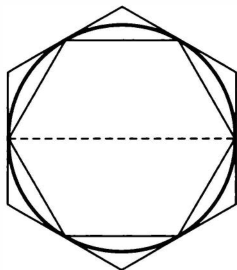
Nu există, în toată istoria numărului π, figură mai relevantă decât a lui Arhimede. Figură de care, de altfel, sunt legat personal încă din copilărie, din moment ce marele matematician și fizician s-a născut și a trăit în Sicilia, nu foarte departe de casa mea din insula Ischia, în Campania. Nu e doar o chestiune de apropiere fizică. Fapt e că Ischia a fost prima colonie greacă din Mediterana occidentală, locuită de grupuri de ionieni și ahei încă din 780 î.C. În insula mea s-a găsit o cupă importată din Creta, „cupa lui Nestor“, care datează chiar din secolul VIII î.C. și pe care e inscripționat ceea ce rămâne până azi cel mai vechi exemplu de scriere alfabetică. În fine, insula mea a aparținut multă vreme Siracuzei, abia apoi devenind romană, deci înainte ca Arhimede să se nască la Siracuza. Înțelegeți așadar că raportul dintre numele pe care se întâmplă să-l port, pi greco, și Arhimede din Siracuza e ceva mai mult decât fructul unei vagi închipuiri îndrăznețe.

Dar să trecem la faptele care-l leagă pe Arhimede nu de P. Greco, ci de π.

Arhimede, care s-a născut şi a trăit în Siracuza între 287 şi 212 î.C., a fost primul care a propus o „metodă ştiinţifică" pentru calculul lui π. O noutate care constituie un autentic salt calitativ în istoria nu doar a numărului nostru, dar şi a gândirii matematice *tout court*. Cunoscută ca „metoda exhaustiei", metoda lui Arhimede e considerată o anticipare a conceptului de *limită* şi a calculului diferenţial pe care îl vor pune la punct Isaac Newton şi Gottfried Leibniz abia două mii de ani mai târziu.

Ca toate ideile cu adevărat geniale, ideea lui Arhimede e simplă. Într-un fel, ea reia tehnica de comparare a figurilor geometrice a mesopotamienilor şi egiptenilor, dar îi imprimă un salt calitativ incomensurabil, sublimând-o într-un raţionament abstract care poate fi considerat prototipul matematicii moderne.

În formă simplificată, raţionamentul lui Arhimede e următorul: dacă înscriu un hexagon într-un cerc, atunci sunt sigur că perimetrul E_1 al hexagonului e inferior circumferinţei C a cercului. Dacă, invers, înscriu un cerc într-un hexagon, atunci sunt sigur că perimetrul E_2 al hexagonului e superior circumferinţei C a cercului.



Aşadar, lungimea circumferinţei C se află între E_1 şi E_2. Cum e uşor de măsurat perimetrul unui poligon, Arhimede cunoaşte foarte bine valorile E_1 şi E_2, cunoscând astfel limitele maximă şi minimă între care e cuprinsă lungimea circumferinţei

$$E_2 \geq C \geq E_1$$

Pe de altă parte, Arhimede cunoaşte raportul dintre π şi circumferinţă (ca de obicei, d e diametrul cercului):

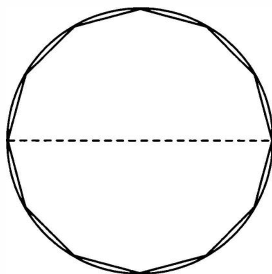
$$C = \pi d$$

$$\pi = \frac{C}{d}$$

Poate deci să deducă uşor că:

$$\frac{E_2}{d} \geq \pi \geq \frac{E_1}{d}$$

Dar asta nu e tot. Dacă dublez numărul laturilor poligonului şi consider unul cu 12 laturi (dodecagonul D) în loc de unul cu 6 laturi, voi obţine o aproximaţie mai bună.



$$\frac{D_2}{d} \geq \pi \geq \frac{D_1}{d}$$

Arhimede continuă cu metoda aceasta și calculează valoarea lui π pe baza unui poligon cu 96 de laturi (P_{96a}) înscris într-un cerc și a unui alt poligon, tot cu 96 de laturi (P_{96b}), circumscris aceluiași cerc.

Ajunge astfel să calculeze valoarea lui π cu precizie foarte bună:

$$\frac{P_{96b}}{d} \geq \pi \geq \frac{P_{96a}}{d}$$

Numeric:

$$3{,}14084... \geq \pi \geq 3{,}14286...$$

În realitate, pe baza unui document atribuit lui Heron din Alexandria, scris în anul 60, dar descoperit în Europa abia în 1896, se pare că Arhimede a mers chiar mai departe, ajungând la următoarea valoare limită pentru π:

$$3{,}140845... \geq \pi \geq 3{,}142857...$$

Nu doar că Arhimede obține o măsură mult mai precisă a numărului nostru, dar începe să ne spună câte ceva despre natura acelei valori, deci și despre natura lui π. Valoarea lui π e o limită. Limita dintre raportul perimetru/diametru al unui poligon regulat cu un număr foarte mare, potențial infinit, de laturi înscris într-un cerc și raportul perimetru/diametru al unui poligon regulat cu un număr egal de laturi circumscris cercului.

Până la urmă, dintr-un singur foc, Arhimede ne furnizează o valoare mai precisă a lui π, o metodă științifică pentru a continua și îmbunătăți calculul, precum și un prim indiciu despre natura acestui număr.

Cum de a reușit Arhimede atât de mult?

Ca să răspundem, trebuie să facem câțiva pași înapoi în timp și să încercăm să pricepem ce era matematica în Grecia

clasică şi cum a evoluat ea în matematica elenistică, aceea care cuprinde şi opera lui Arhimede. Temă importantă deoarece, aşa cum scrie Morris Kline, „dacă grecii ocupă un loc proeminent în istoria civilizaţiei, atunci în istoria matematicii sunt evenimentul suprem“.

3. Matematica (şi π) în Grecia clasică

ŞCOALA IONICĂ

„Civilizaţia greacă" e mai recentă decât cea mesopotamiană sau egipteană, dar tot datează de pe la 3000 sau chiar 3200 î.C., deci chiar tânără nu e. Se afirmă în teritoriile continentale şi în insulele pe care le numim Grecia, nu doar de-a lungul coastelor Asiei Mici, prin popoare care provin din Orientul apropiat şi, mai precis, din Anatolia. Încă o poveste cu popoare migratoare, dar nu vom intra în detaliile ei, pentru că perioada care ne interesează e mult mai recentă şi bine delimitată: durează între 600 şi 300 î.C. Să spunem doar că aceasta, începută în mileniul IV î.C., e prima „civilizaţie avansată" din acel mic apendice al Eurasiei pe care azi îl numim Europa. Că protagoniştii, primii greci, ştiau să cultive plantele, să crească animale şi să lucreze metalele, inclusiv fierul. Că aveau contacte strânse cu egiptenii şi cu mesopotamienii. Că au fost primul popor de limbă indoeuropeană care a folosit scrisul. Că, pentru a scrie, pe la începutul secolului VIII î.C., au adoptat, cu modificări oportune, alfabetul fenicienilor – popor de navigatori care locuia de-a lungul coastelor Libanului. „Cupa lui Nestor" de la vila Arbusto din Ischia e primul exemplu absolut al scrierii alfabetice a grecilor. Şi cum inscripţia e în versuri, constituie şi primul exemplu cunoscut de poezie scrisă cu literele unui

alfabet. Versurile fac evident aluzie la Cupa lui Nestor descrisă de Homer (care a trăit, probabil, în secolul IX î.C.) în *Iliada*. Şi e semnificativ că această cupă a fost descoperită departe de locul unde a fost fabricată, în prima colonie fondată de greci în Marea Tireniană şi în întreaga Mediterană occidentală. Faptul arată că grecii aveau interese culturale foarte largi, un mare dinamism şi o mare capacitate de inovare. Într-adevăr, nu e întâmplător că în secolul VII au început să scrie pe un suport nou şi comod, importat din Egipt: papirusul.

Acestea sunt, în mare, premisele care au făcut ca, nu mult mai târziu, în secolul VI î.C., pe ţărmurile Egeei să se pună bazele solide ale matematicii şi ale filozofiei moderne. Adică ale matematicii şi ale filozofiei pe care încă le studiem. Iar dacă azi considerăm – în mod greşit – matematica şi filozofia ca fiind discipline separate, în Grecia, primii matematicieni moderni sunt şi primii filozofi moderni. Şi invers: primii filozofi sunt pricepuţi şi la matematică.

Aceşti primi filozofi şi matematicieni greci sunt persoane cu o cultură eclectică şi unitară: ei nu cred, ca mulţi dintre noi azi, că ar exista două culturi. Dimpotrivă, ei cred într-o singură cultură umană. Una întemeiată pe raţiune. Cred că universul e un cosmos: un întreg ordonat în mod armonios şi, mai mult, inteligibil raţiunii umane. Matematica şi filozofia – deci raţiunea – sunt, astfel, instrumente necesare şi suficiente pentru a înţelege ordinea cosmică.

Iată de ce se spune că între secolele VI şi V î.C. acolo, în Grecia, mai precis în Ionia, anume în Milet, omenirea a descoperit „puterea raţiunii".

În realitate, un vânt de acelaşi fel suflă de-a lungul întregii centuri care duce din Grecia până-n Extremul Orient. Într-adevăr, dacă Thales a trăit cam între 640 şi 546 î.C., în India, Gautama Buddha, acel Buddha istoric, a trăit între

566 şi 486 î.C. Aproape contemporan cu Confucius, care a trăit între 551 şi 479 î.C. şi a impregnat cu gândirea sa cultura şi istoria Chinei. Trăgând linie, între secolele X şi V î.C., marile civilizaţii de pe cele trei continente alăturate descoperă, chiar dacă fiecare în felul ei, „puterea raţiunii". Încă o dovadă că Africa, Asia şi Europa erau deja nu doar fizic, ci şi cultural conectate.

Nu ne părăsim tema. Pentru că această constatare e, aşa cum vom vedea peste câteva pagini, cu adevărat importantă pentru istoria matematicii, şi deci pentru istoria lui π.

Dar să revenim în Grecia, în Ionia, la Milet. Aici Thales inaugurează ceea ce se va dovedi o constantă în istoria filozofiei şi a ştiinţei greceşti: şcoala. După cum aminteşte Morris Kline în a sa *Istorie a gândirii matematice*, următorii filozofi sunt elevi direcţi sau indirecţi ai lui Thales, formaţi la „şcoala din Milet": Anaximandru, Anaximene, Anaxagoras. E probabil ca şi Pitagora să fi studiat matematica la şcoala lui Thales, întemeind apoi, la rândul său, propria şcoală extrem de originală la Crotone, contribuind astfel la transformarea Italiei meridionale în Magna Grecia.

Thales e un mare călător şi în peregrinările sale poposeşte vreme îndelungată în Egipt, unde studiază matematica şi astronomia. Se pare că pe baza cunoştinţelor matematice dobândite acolo reuşeşte să prevadă o eclipsă de soare în 585 î.C., stârnind stupoarea şi admiraţia concetăţenilor săi greci, cu totul inocenţi încă în privinţa ordinii mişcărilor cereşti. Se spune despre Thales că ar fi calculat şi înălţimea piramidelor, comparându-le umbrele cu cea produsă de un băţ de lungime cunoscută. Mai ştim şi că Thales cunoaşte metoda deductivă şi că tot lui i se atribuie formularea şi demonstrarea a patru teoreme matematice. În realitate, Thales înţelege şi predă acele teoreme a căror paternitate aparţine probabil unui (nouă) necunoscut matematician egiptean sau babilonian.

Nu vrem în nici un caz să diminuăm astfel figura filozofului şi matematicianului din Milet. Thales a fost membrana osmotică prin care cunoştinţele apărute de-a lungul Nilului sau/şi între Tigru şi Eufrat au pătruns în Grecia, contaminând şi fertilizând cultura unui popor mai mult decât doritor să înţeleagă lumea.

Această dorinţă se naşte, în mod natural, dintr-o exigenţă socială. În secolele dinaintea lui Thales şi în deceniile care-i urmează, grecii dau viaţă oraşelor-stat numite *poleis*, care nu mai sunt guvernate de un monarh, ci de o clasă socială emergentă. Dezvoltarea demografică şi economică a grecilor stimulează apariţia unor noi clase foarte ambiţioase – negustori, meşteşugari şi chiar lucrători industriali –, dar şi a acelui fenomen de expansiune care-i face să colonizeze în Orient Tracia şi coastele Mării Negre, iar în Occident coastele franceze, spaniole şi, mai ales, Italia meridională.

PITAGORA ŞI SCANDALUL LOGIC AL LUI HIPPASOS

În istoria matematicii şi chiar în istoria, mai limitată, a lui π un loc special îl au Pitagora din Samos şi şcoala lui creată tocmai în una dintre noile colonii, Crotone, din Magna Grecia. Pitagora studiase la Milet şi, asemenea lui Thales, călătorise în Egipt şi în Mesopotamia. S-a mutat apoi la Crotone, oraş nou şi însufleţit, unde a fondat o şcoală cu caracter nu doar filozofic şi matematic, dar şi religios şi politic. Tocmai din cauza politicii a fost şcoala închisă destul de curând. Într-adevăr, Pitagora s-a aliat cu aristocraţii oraşului şi a intrat în conflict cu partida democrată. Aristocraţii au pierdut, iar matematicianul filozof a fost nevoit să se refugieze în oraşul vecin, Metapont, unde a fost însă găsit şi ucis de adversarii săi în 497 î.C.

Dar moartea lui Pitagora nu înseamnă defel decesul pitagorismului, adică al gândirii sale. Şcoala sa a fost închisă fizic, dar nu s-a pierdut, dimpotrivă, mai degrabă s-a răspândit în toată lumea greacă. De exemplu, cel mai faimos elev al său, chiar dacă din generaţia a doua, Archytas din Tarent, e punctul de referinţă al unei şcoli pitagoreice care apare în Ionia.

Aici însă ne interesează nu atât peripeţiile şcolii pitagoreice, cât gândirea matematică a membrilor ei, începând cu aceea a lui Pitagora, filozoful din Samos meritând un loc cu adevărat special în istoria ştiinţei numerelor, pentru că el desface matematica de realitatea fizică şi o plasează într-o altă dimensiune: într-o realitate abstractă. O realitate pe care Pitagora o consideră chiar de ordin superior celei fizice. În viziunea fondatorului şcolii de la Crotone, matematica are de fapt o viaţă independentă de lumea fizică, în timp ce lumea fizică nu are o viaţă independentă de matematică – în măsura în care e adevărat, subliniază Pitagora, că întreg universul material e număr.

Ordinea cosmică e ordine matematică.

Sunetele, de pildă, sunt consonante şi devin muzică atunci când se pot exprima folosind numere întregi simple (1, 2, 3, 4) sau rapoarte între ele. Regula aceasta, zisă a lui *tetrakys*, va fi baza teoriei muzicale occidentale pentru cel puţin două mii de ani. Până când, în secolul XVI, va fi reformată de Gioseffo Zarlino şi în sfârşit contestată de Vincenzio Galilei, tatăl mult mai celebrului Galileo Galilei.

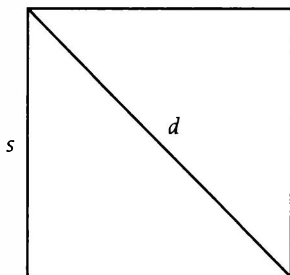
În realitate, separarea dintre matematica abstractă şi materia fizică nu e întotdeauna totală. Mulţi dintre pitagoreici credeau că numerele sunt atomii din care e constituită realitatea materială, fiind deci şi ele înzestrate cu realitate fizică. Dar se pare că Pitagora nu gândea defel aşa. Pentru

el, numerele aparţin unei dimensiuni imateriale cu totul independente. Într-adevăr, istoricul Eudemos din Rhodos îl consideră pe Pitagora părintele matematicii pure.

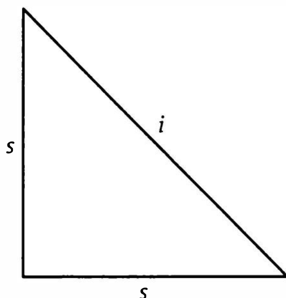
Nu putem să zăbovim mai mult asupra reconstrucţiei filozofiei matematice a lui Pitagora şi a şcolii sale. Să spunem doar că, mulţumită mai ales lui Pitagora, grecii inaugurează o manieră nouă de a privi matematica, bazată pe logica deductivă, manieră care stă la temelia matematicii moderne. Din câteva axiome putem deduce o serie practic infinită de rezultate consecutive pe cale deductivă. În plus, Pitagora e priceput la geometrie şi produce rezultate noi în acest domeniu. Cunoaşte teorema care-i poartă numele, chiar dacă nu el a descoperit-o. În fine, să spunem că la Crotone se crede că totul, inclusiv geometria şi muzica, se poate exprima ori prin numere întregi, ori prin rapoarte finite între numere întregi. Acesta e, pentru Pitagora, cosmosul, întregul ordonat în mod armonios.

Ipse dixit.

Destinul a vrut ca tocmai unul dintre cei mai străluciţi elevi ai rafinatei sale şcoli să pună la un moment dat o problemă care are mult de-a face cu povestea noastră. Să luăm un pătrat, îi explică Hippasos din Metapont maestrului. Pentru simplitate, să-l luăm cu latură unitară, $s = 1$.



Acum să calculăm diagonala lui, *d*. Nu e altceva decât ipotenuza (*i*) a unui triunghi dreptunghic cu două laturi egale.



Conform unei teoreme bine-cunoscute, pe care noi o numim teorema lui Pitagora, pătratul construit pe ipotenuză e suma pătratelor construite pe laturi:

$$i^2 = s^2 + s^2 = 1^1 + 1^2 = 2$$

Așadar, susține Hippasos în fața colegilor săi și a lui Pitagora, care e consternat:

$$i = \sqrt{2}$$

Dar rădăcina lui 2 nu e nici număr întreg, nici raport de numere întregi. Or, după cum ne spune Aristotel, tocmai Pitagora și ai lui se întrebaseră care era adevărata natură a lui $\sqrt{2}$ și, cu un raționament prin absurd, demonstraseră că e vorba despre un număr incomensurabil. Azi spunem că e un număr zecimal infinit și neperiodic.

$$\sqrt{2} = 1{,}414215686...$$

Motiv pentru care, poate ca un omagiu adus viziunii lui Pitagora asupra lumii, spunem că $\sqrt{2}$ e irațional. De fapt, Pitagora și ai lui nu știau că $\sqrt{2}$ e un număr zecimal infinit

şi neperiodic, dar le era clar că acest fel de numere are o natură cât se poate de diferită faţă de natura numerelor comensurabile.

Demonstraţia incomensurabilităţii lui $\sqrt{2}$ apare în Cartea a X-a a *Elementelor*, scrisă ca propoziţia 117, de către Euclid, aproape două secole după problema ridicată de Hippasos. Dar ştim că demonstraţia nu-i aparţine nici lui Euclid, fiind adăugată ulterior. Într-adevăr, în versiunile curente azi ale *Elementelor*, ea nu apare.

Dar să lăsăm istoricilor de profesie lămurirea chestiunii şi să ne întoarcem la Hippasos. Descoperirea sa e triplă. Într-adevăr, tânărul şi sclipitorul matematician demonstrează că:

1. există numere incomensurabile care nu sunt nici întregi, nici rapoarte de numere întregi şi care, în consecinţă, par să depăşească raţiunea;
2. există în cosmos ceva, o entitate geometrică mai precis, care nu poate fi exprimată în termeni de numere întregi sau de rapoarte de numere întregi;
3. există deci o problemă serioasă în legătura dintre numere şi geometrie. Numerele sunt entităţi discrete. În schimb, formele geometrice sunt continue. Iar problema diagonalei pătratului evidenţiază tocmai această contradicţie stridentă şi profundă.

Toate şi fiecare dintre implicaţiile lui Hippasos subminează filozofia matematică a maestrului. Inacceptabil.

Legenda (pentru că despre o legendă discutăm) spune că Hippasos pusese problema incomensurabilităţii diagonalei pătratului pe când se afla pe o navă în largul coastei Crotonei. Iar tovarăşii săi, la ordinul lui Pitagora, l-ar fi aruncat imediat în mare, rezultat al unei sentinţe fără drept de apel: Hippasos

era vinovat de a fi demonstrat că în univers nu e totul armonios ordonat. Sau, cel puţin, că nu corespund toate ideii de ordine armonioasă concepute de maestrul său, Pitagora.

ATENA ŞI ŞCOALA SOFIŞTILOR

Indiferent dacă e adevărată sau nu legenda lui Hippasos, cert este că şcoala lui Pitagora avea anumite trăsături mistice şi tragice. Nu toate şcolile greceşti de matematică au aceste caracteristici. Şi erau multe şi importante. Ca aceea de filozofie şi matematică a lui Xenofan care, născut la Colofon, în Ionia, emigrează în Sicilia, la Zancle (Messina de azi), unde fondează o şcoală frecventată, între alţii, de Parmenide şi Zenon, ambii originari din Elea, regiune din Campania, în apropierea actualei Ascea (provincia Salerno).

Xenofan, Parmenide şi Zenon se mută chiar la Elea pentru a forma ceea ce va deveni faimoasa „şcoală eleată". Aceasta e şcoala care aprofundează tema raportului dintre continuu şi discontinuu. Zenon va propune patru paradoxuri tulburătoare – printre care acela celebru al lui Ahile cel iute de picior care nu poate să ajungă din urmă broasca ţestoasă; precum şi pe acela al săgeţii care, odată plecată din arc, rămâne veşnic nemişcată în aer – cărora abia după multă vreme avea să li se găsească o rezolvare acceptabilă din punct de vedere ştiinţific. În particular, va trebui aşteptat ca Isaac Newton şi Gottfried Leibniz să elaboreze calculul diferenţial, atât de apropiat totuşi de metoda exhaustiei a lui Arhimede din Siracuza.

Migraţiile intelectualilor în Grecia antică nu au sens unic, din patrie către Magna Grecia. Unii se mută în sens invers.

Pe lângă Archytas din Tarent, elev din a doua generație a lui Pitagora, studiază un tânăr promițător, Eudoxos care va întemeia o școală la Cizic, în Asia Mică. Dar despre el și despre școala lui vom vorbi curând.

Acum să ne îndreptăm atenția către cea mai faimoasă cetate grecească, Atena. Pentru că în Atena lui Pericle apar probabil cele mai frecventate școli de matematică și filozofie din secolul V î.C.: una e cea (cu plată) a sofiștilor – Protagoras, Gorgias și alții –, activi în a doua jumătate a secolului; alta, menită să devină mult mai faimoasă, e Academia lui Platon, elevul lui Socrate.

S-a spus că istoria filozofiei nu e decât o serie de note de subsol la operele lui Platon și ale elevului său Aristotel. Nu e deci exagerat să spunem că Academia lui Platon, cu Liceul deschis mai târziu de Aristotel, a fost cea mai mare școală de filozofie a Antichității. Dar, spre deosebire de Liceul lui Aristotel, Academia lui Platon e o la fel de mare școală de matematică. De altfel, deasupra intrării stă scris: „Să nu intre aici cine nu cunoaște geometria".

Nu, nu e întâmplător. În Atena lui Pericle se respiră aer și matematică (în plus față de aer și filozofie sau aer și artă). Nu e întâmplător nici că legătura directă cu π și cu valoarea sa o face Anaxagoras din Clazomene, maestrul lui Pericle. Adevărul e că suntem de-acum într-un secol – V î.C. – cu adevărat crucial pentru istoria lumii occidentale: acum resping grecii definitiv încercările de cucerire ale perșilor, tot acum își afirmă Atena lui Pericle hegemonia culturală, iar Sparta se impune prin forța armelor, în urma unui lung război, în fața cultivatei sale rivale.

Dar între victoria definitivă asupra perșilor (479 î.C.) și înfrângerea suferită în fața Spartei (405 î.C.), Atena devine un centru economic foarte important și un „oraș creativ" care

radiază lumina absolută a artei, a filozofiei și a matematicii sale. Într-adevăr, Atena, căreia-i putem spune „orașul rațiunii", e cea care „inventează" raționamentul abstract și acordă Ioniei și Magnei Grecia rolul de centru foarte dinamic al studiilor matematice.

Iar de matematică se ocupă ambele școli pe care le-am pomenit.

Sofiștii abordează trei probleme așa-zise de construcție, care se rezolvă doar cu rigla și compasul: cuadratura cercului; dat un cub, cum să se găsească latura unui alt cub cu volum dublu față de primul (duplicarea cubului); cum să împarți un unghi în trei părți egale (trisecțiunea unghiului).

Atena secolului V î.C. e considerată patria rațiunii și a democrației. Lucru cu care Anaxagoras, cel care a adus filozofia în acest oraș, poate n-ar fi fost de acord, din moment ce a fost încarcerat în urma acuzației de blasfemie pentru a fi susținut în public că Soarele nu e un zeu, ci o bucată de rocă incandescentă mare cât de cel puțin patru ori Peloponezul.

Anaxagoras inaugurează – vai! – lungul șir al oamenilor persecutați pentru teoriile lor științifice, la fel cum Socrate îl inaugurează pe al celor persecutați pentru propriile idei filozofice. Dar Anaxagoras inaugurează și șirul nu mai puțin lung al celor care caută „cuadratura cercului", adică o metodă pentru a construi un pătrat cu arie egală cu a unui cerc dat. Problema, de natură teoretică, va pasiona mulți matematicieni până când, în 1882, se va demonstra că e insolubilă.

Tema e strâns legată de povestea lui π. Într-adevăr, în 1882 Ferdinand von Lindemann va publica un articol despre „natura" numărului nostru, demonstrând că e transcendent (aveți un pic de răbdare, veți descoperi despre ce e vorba peste

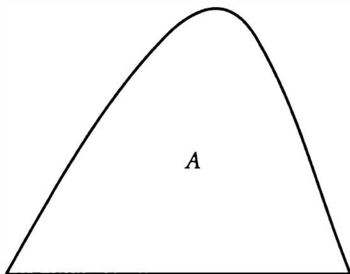
câteva pagini). Înainte de asta, Lindemann demonstrase că dacă π ar fi un număr transcendent, atunci prima problemă a sofiştilor, cuadratura cercului, ar fi insolubilă.

Să fi pus şi să fi început să trateze o problemă pentru rezolvarea căreia a fost nevoie peste două mii de ani nu e puţin lucru pentru Anaxagoras şi pentru sofişti.

Dar cel care, în acest moment, contează cel mai mult în economia poveştii noastre, pentru că îl anticipează pe Arhimede, e sofistul Antifon, care spunea că dacă se ia un cerc şi se înscrie în el un pătrat, apoi un poligon regulat care are dublul numărului laturilor sale (un octogon), iar apoi se dublează încă o dată numărul de laturi (un poligon cu 16 laturi) şi se dublează iarăşi (poligon cu 32 de laturi) şi se continuă până la *epuizarea* (*exhaustarea*) cercului – adică, practic, până la infinit –, se obţine un poligon cu un perimetru care coincide cu circumferinţa cercului.

Iar cum orice bun geometru, continuă Antifon, ştie să obţină din aria unui poligon oarecare pe aceea echivalentă a unui pătrat, cuadratura cercului e, în principiu, posibilă.

Cam în acela şi timp, Hipocrate din Chios – a nu se confunda cu medicul Hipocrate din Cos, contemporanul său – scrie lucrarea intitulată *Elemente de geometrie*. E opera fundamentală a unui specialist. Şi nu e întâmplător că Hipocrate e considerat primul matematician specialist din istorie, cel puţin din aceea occidentală. Şi pentru că învăţatul din Chios e şi primul care demonstrează că se poate calcula aria (A) subîntinsă de o curbă, el intră de drept în marea poveste a lui π.



E vorba despre faimoasa problemă a cuadraturii lunulelor circulare, înrudită cu cea a cuadraturii cercului. Din păcate, *Elementele* şi toate scrierile originare ale lui Hipocrate s-au pierdut. Dar e probabil ca demonstraţia sa să fi fost prin absurd: prima demonstraţie prin *reductio ad absurdum* din istoria matematicii. Demonstraţia va fi reluată de doi dintre cei mai mari: Eudoxos şi Euclid, personaje cu care, aveţi un pic de răbdare, ne vom întâlni foarte curând. Să spunem însă de pe acum că rezultatele la care au ajuns Antifon şi Hipocrate vor fi considerate false de Aristotel.

Alt exponent al şcolii sofiste e Hippias din Elis. El e primul care a definit şi construit cu rigla şi compasul o curbă nouă, diferită şi de linia dreaptă, şi de cerc. Azi e cunoscută ca „trisectoarea lui Hippias" sau „cuadratrix". Nu intrăm în detalii. Să amintim doar că „trisectoarea lui Hippias" se foloseşte şi pentru a „cuadra cercul". Şi că, mai ales, în Atena secolului V, matematica începe într-adevăr să se schimbe. Filozofii şi matematicienii se interesează de probleme teoretice care merg mult mai departe decât nevoile practice imediate. Se studiază din ce în ce mai aplicat problema geometrică a liniilor curbe, inclusiv cercul. Toate aceste studii fac ca numărului π să i se acorde din ce în ce mai multă atenţie.

Preeminența matematică a sofiștilor în Atena nu durează mult. La începutul secolului IV se impune școala unui filozof care, așa cum am spus deja, va face să se vorbească mult despre el și va marca pentru totdeauna cultura occidentală: Platon.

Despre Platon există o literatură practic nesfârșită, așa că nu vom zăbovi mult asupra lui. Vom spune doar că e elevul lui Socrate, care, deși mare filozof, la matematică nu se prea pricepea, în timp ce Platon știa multă matematică. Pe de altă parte, filozofia lui e impregnată de pitagorism și printre principalii lui maeștri, lăsându-l deoparte pe Socrate, găsim chiar doi elevi ai lui Pitagora: Theodoros din Cirene și Archytas din Tarent.

Fiu al lui Ariston, Platon întemeiază în 387 î.C., la Atena, cetatea sa natală, o nouă școală, Academia, găzduită într-un palat – palatul cunoașterii – unde filozoful și colaboratorii săi dau lecții formale grupurilor de studenți. Dacă e imposibil de supraevaluat influența pe care a avut-o școala lui Platon în istoria filozofiei, fie de-a lungul a nouă sute de ani de activitate (a fost închisă de împăratul Iustinian în 529), fie după aceea, e la fel de dificil să-i exagerăm influența în istoria gândirii matematice. În afara deja citatului „Să nu intre aici cine nu cunoaște geometria", Plutarh îi atribuie un alt motto sortit să devină faimos și, mai ales, să capete o valoare fundamentală: „Dumnezeu geometrizează mereu".

De altfel, unul dintre maeștrii săi, Archytas, are meritul (presupus) de a fi introdus cvadriviumul – alăturarea aritmeticii, geometriei, muzicii și astronomiei – la baza învățământului liberal. Iar un alt maestru, Theodoros din Cirene, a dus mai departe studiile lui Hippasos, descoperind că și

$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ până la $\sqrt{17}$ sunt, asemenea lui $\sqrt{2}$, numere incomensurabile. În timp ce unul dintre cei mai buni elevi ai lui Platon, Theaitetos, va continua să studieze aceste numere incomensurabile care îl tulburaseră atât de tare pe Pitagora.

Platon e deci perfect conştient de limitele ingenuei viziuni pitagoreice. Dar nu doar pentru asta intră marele filozof de drept în scurta noastră poveste a lui π. Adevărul e că nici noi, nici mai ales istoricii de profesie nu-i putem ocoli pe Platon şi Academia lui: în primul rând pentru că, aşa cum aminteşte Carl Boyer în a sa *Istorie a matematicii*, „chiar dacă Platon nu a dat el însuşi, din punct de vedere tehnic, nici o contribuţie importantă specifică în matematică, a fost totuşi centrul activităţii matematice din vremea aceea, căreia i-a călăuzit şi inspirat dezvoltarea". E extrem de important, scrie Morris Kline, „că aproape toate lucrările matematice importante din secolul IV au fost elaborate de prieteni şi elevi ai lui Platon". În concluzie, marele filozof e un „creator de matematicieni": toţi marii matematicieni ai vremii ies din şcoala sa.

În al doilea rând, nu-l putem ocoli pe Platon mai ales pentru că el şi şcoala lui rafinează intuiţiile lui Pitagora şi consideră numerele şi figurile geometrice ca entităţi abstracte care nu au nimic de-a face cu obiectele materiale din lumea fizică. Numerele şi formele geometrice trăiesc într-o dimensiune proprie şi independentă: o realitate abstractă şi pură, unica în care se poate ajunge la adevărul absolut. Această idee deloc evidentă – idee metafizică, care nu întâmplător se naşte într-un context în care numerele şi entităţile geometrice devin obiecte asupra cărora se îndreaptă atenţia filozofilor – va avea şi are încă o influenţă profundă şi, în unele privinţe, determinantă asupra dezvoltării matematicii.

Abordarea aceasta are şi dezavantaje şi, potrivit unora, contraindicaţii: îndepărtează matematica de chestiunile practice şi de aplicaţiile concrete. Dar are inestimabilul avantaj de a da viaţă în mod sistematic metodei analitice, bazate pe raţionamentul axiomatic-deductiv, şi metodei *reductio ad absurdum*, două abordări complet abstracte care totuşi modelează şi azi felul nostru de a raţiona în matematică.

LICEUL LUI ARISTOTEL

Unul dintre marii elevi ai şcolii lui Platon e Aristotel din Stagira, considerat, alături de maestrul său, cel mai mare filozof al tuturor timpurilor. În realitate, Aristotel e considerat şi cel mai mare logician al tuturor timpurilor, egalat totuşi, spun mulţi, abia în secolul XX de Kurt Gödel. Oricum ar fi, trei lucruri sunt certe: Stagiritul se îndepărtează de gândirea lui Platon, elaborează una proprie şi fondează şcoala sa de filozofie la Atena, Liceul.

Sigur, Aristotel nu are nici o contribuţie directă în matematică, chiar dacă se străduieşte să contrazică teoria indivizibilelor (adică a mărimilor infinitezimale) propusă de colegul Xenocrate, care i-a urmat lui Platon la conducerea Academiei. Dar contribuie în mod fundamental, chiar întemeietor, la dezvoltarea logicii, şi citează adesea în cărţile lui teoreme importante din matematică. Dar Aristotel intră indirect în istoria matematicii şi, mai general, a ştiinţei şi ca unul dintre cei mai influenţi învăţători ai tânărului Alexandru Macedon, personaj la rândul său decisiv în aventura ştiinţifică, dintr-o serie întreagă de motive pe care le vom lămuri curând. Pentru toate acestea e potrivit să-i acordăm lui Aristotel un anumit loc într-o carte care încearcă să reconstituie istoria matematică şi, ca să spunem aşa, socială a lui π.

Merită să-l amintim în această rapidă panoramare şi pe un anume Autolycos, de loc din Pitana şi autor al unui mic tratat *Despre sfera în mişcare*. Nu sunt aici contribuţii nici originale, nici foarte profunde, dar e prima operă matematică ajunsă până la noi şi e dovada că, în vremea lui Platon şi Aristotel, grecii au o cultură geometrică avansată, ştiind de-acum să organizeze teoremele de geometrie şi să le demonstreze într-o manieră limpede şi exhaustivă – că, într-un cuvânt, au inventat deja geometria modernă.

EUDOXOS ŞI METODA EXHAUSTIEI

După Carl Boyer, şcoala lui Platon din Atena secolului V î.C. a fost cea mai importantă şcoală matematică, nu doar filozofică, din lume. Iar cel mai mare matematician care a frecventat cea mai mare şcoală matematică din lume e, cu siguranţă, Eudoxos.

Născut la Cnidos, ajuns la Atena şi primit în Academie, Eudoxos defineşte în termeni riguroşi ce înseamnă a pune în raport două mărimi şi elaborează o adevărată teorie a proporţiilor, prima din istoria geometriei. Pentru asta rezolvă, cel puţin în parte, problema mărimilor incomensurabile. Problemă decisivă pentru cine vrea să abordeze tema naturii lui π: e acesta un număr incomensurabil sau nu?

În teoria lui, susţine Morris Kline, Eudoxos separă ştiinţa numerelor de cea a formelor; discretul de continuu; matematica, în care apare problema nerezolvată a incomensurabilelor, de geometrie, unde, în schimb, problema poate fi rezolvată, punând în raport anumite mărimi, cum ar fi latura şi diagonala unui pătrat. Dar să nu intrăm mai adânc în istoria concepţiilor lui Eudoxos şi să revenim la π al nostru.

Ei bine, Eudoxos atacă şi problema fundamentală de care se loveşte oricine încearcă să calculeze valoarea lui π: problema metodei. Arhimede recunoaşte că Eudoxos e primul care propune metoda exhaustiei, inventând astfel echivalentul conceptului modern de *integrală*: cum să calculăm aria subîntinsă de o curbă.

Să spunem imediat că termenul „exhaustie" nu e de fapt grecesc. A fost introdus în 1647 de Grégoire de Saint-Vincent. Dar metoda exhaustiei e cu adevărat antică. E vorba despre o metodă pentru a verifica dacă două arii (a unui cerc şi a unui poligon regulat, de exemplu) sau două volume (al unui con şi al unui cilindru, de exemplu) sunt egale.

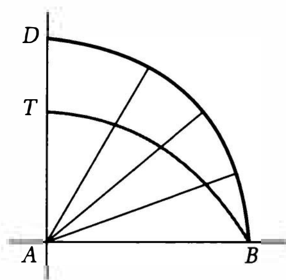
Pentru această verificare, Eudoxos inventează două concepte. Pe primul îl numim azi „oricât de mic": înscriem într-un cerc un poligon regulat cu latura „oricât de mică". Pe al doilea îl numim „trecere la limită": pe măsură ce facem ca laturile să fie oricât de mici, perimetrul poligonului tinde să egaleze circumferinţa cercului în care e înscris poligonul. Azi spunem că circumferinţa cercului e limita unui poligon regulat cu laturile infinit de mici.

Metoda exhaustiei comportă acel tip de „demonstraţie prin absurd" foarte folosit în Academia lui Platon. Utilizând conceptele de „oricât de mic" şi de „demonstraţie prin absurd", Eudoxos demonstrează că volumele a două sfere se află în acelaşi raport ca volumele a două cuburi, dacă acestea din urmă au laturile respectiv egale cu razele sferelor. Tot el demonstrează că volumul conului e o treime din volumul unui cilindru cu bază şi înălţime respectiv egale.

Eudoxos ar fi deci părintele calculului integral, ceea ce ar reprezenta, după Carl Boyer, contribuţia maximă a Academiei lui Platon în matematică. Nu e puţin. Şi cum Eudoxos e şi primul care a furnizat o descriere geometrică a mişcărilor

Soarelui, Lunii și ale celor cinci planete cunoscute pe-atunci, e considerat și ca fondator al astronomiei științifice. Cu această dublă paternitate, Eudoxos intră de drept în empireul restrâns al celor mai mari oameni de știință din toate timpurile.

Matematicianul din Cnidos a fondat, la rândul său, o școală ai cărei cei mai importanți discipoli sunt frații Menechmos și Dinostratos. Primul a descoperit curbele cărora azi le spunem elipsă, parabolă și hiperbolă. Cel de-al doilea, Dinostratos, a obținut o formulă pentru cuadratura cercului: plecând de la curba numită „trisectoarea lui Hippias", el a construit o relație precisă între latura pătratului asociat trisectoarei și raza unui cerc care o intersectează sub un unghi dintre rază și latura pătratului tinzând spre zero. Valoarea limită a raportului r/l e egală cu $2/\pi$.



Pentru cei pasionați, să mai spunem că, pentru cuadratura cercului, Dinostratos face apel la teoria proporțiilor a lui Eudoxos și demonstrează că segmentul *AB* al „trisectoarei lui Hippias" (vezi figura) e „media proporțională" dintre arcul *BD* și segmentul *AT*. Mediu proporțional înseamnă că raportul dintre *BD* și *AB* e egal cu raportul dintre *AB* și *AT*. Folosind simbolurile matematice de azi: $BD : AB = AB : AT$.

Cum *AB* și *AT* sunt segmente rectilinii ușor de măsurat, se poate astfel obține lungimea arcului *BD*. Dar arcul *BD* este un sfert din circumferință. Acum, cu simple operațiuni geometrice, se poate construi ușor un pătrat cu aria unui cerc de rază *AB*.

4. Știința elenistică

ALEXANDRIA, ORAȘ CULTURAL

Scrie Morris Kline: „Când, în perioada alexandrină (din 300 î.C. până pe la 600 d.C.), a fost ridicată bariera dintre clasele cultivate și sclavi, iar clasele cultivate au început să se intereseze de chestiunile practice, atenția s-a mutat către cunoașterea cantitativă și către dezvoltarea aritmeticii și a algebrei".

Istoricul american observă o mare noutate – autentic punct de cotitură – în anii marcați de aventura, în multe privințe incredibilă, a unui tânăr macedonean, Alexandru, fiul lui Filip și elev al lui Aristotel, care în cursul scurtei sale vieți, doar 33 de ani, a unificat Grecia și a construit un imperiu care se întindea de la Mediterana până la Oceanul Indian, cuprinzând trei mari sisteme fluviale în jurul cărora se aglomerau unele dintre cele mai mari civilizații ale trecutului și al prezentului: aceea a Nilului, a Tigrului și Eufratului, a Indului.

Departe de noi fie și ideea de a reconstitui măreața realizare a lui Alexandru. Să spunem doar că el nu s-a limitat la a contamina între ele cunoștințele acelor civilizații atât de diferite, nici la organizarea unor adevărate campanii științifice pentru producerea de cunoștințe noi, impulsionând

cercetarea şi inovarea tehnologică. Alexandru şi urmaşii lui au creat cu adevărat o nouă economie, fundamental diferită de aceea a Greciei clasice, care pune în strânsă legătură teritorii enorme prin intermediul schimburilor intense şi care se bazează nu numai pe agricultură, ci şi pe un tip de producţie urbană de bunuri şi obiecte ieşite din manufacturi pe care, cu o minimă îndrăzneală, am putea-o numi de tip industrial.

Acesta e motivul pentru care în noua societate care se întinde între Mediterana şi Ind, scrie Kline, „oamenii cultivaţi încep să se intereseze de chestiunile practice", iar „interesul se deplasează către cunoaşterea cantitativă".

Această transformare, alimentată de contaminarea culturală, comportă o tranziţie economică de o asemenea amploare, încât dă efectiv naştere unei noi civilizaţii: cea elenistică.

Un rol decisiv în dezvoltarea civilizaţiei elenistice, al unei economii (şi) manufacturiere şi a unei ştiinţe foarte aplecate spre cunoaşterea cantitativă l-a jucat un oraş pe care tânărul de douăzeci şi patru de ani care era pe-atunci Alexandru l-a întemeiat în timpul expediţiei sale în Egipt, între 332 şi 331 î.C. Încă şi azi oraşul îi poartă numele: Alexandria.

Când tânărul aventurier moare, în 323 î.C., imperiul se împarte, cum e bine ştiut, între generalii săi, aşa-zişii diadohi. În Egipt se afirmă generalul Ptolemeu din Soter, care devine rege şi întemeietor al unei noi dinastii pe pământul faraonilor. Acest Ptolemeu e cel care face din Alexandria un centru cultural, fondând echivalentul unei universităţi moderne pe care, în onoarea muzelor, o numeşte Muzeu. Ptolemeu vrea ca Muzeul să fie nu doar şi nu atât o şcoală de excelenţă, dar şi, mai ales, un centru – cel mai mare din lume – de producere de noi cunoştinţe. Scop în care cheamă acolo exponenţii majori ai culturii elenistice filozofice şi ştiinţifice.

Sub aripa protectoare a despoţilor luminaţi din dinastia Ptolemeilor, Muzeul din Alexandria devine în scurt timp cel mai mare centru cultural al lumii elenistice. Unul cosmopolit, cu savanţi care sosesc de pretutindeni, dar care, în majoritate, sunt greci, egipteni, apoi evrei. Toţi de nivel înalt, dacă nu foarte înalt. Aşa devine Alexandria, şi va rămâne multă vreme, „capitala mondială a ştiinţei".

Alăturată Muzeului şi componentă cu adevărat fundamentală a sa este, începând din 305 î.C., Biblioteca: va ajunge să găzduiască circa 750 000 de volume. Al treilea sau al patrulea (în funcţie de izvoare) director al Bibliotecii e un mare matematician, astronom şi geograf: Eratostene din Cirene, care, între altele, reuşeşte să calculeze circumferinţa Pământului cu o eroare mai mică de 1% faţă de valoarea cunoscută azi, măsurând pur şi simplu la aceeaşi oră umbrele lăsate de soare în oraşele Alexandria şi Aswan, ambele aflate pe acelaşi meridian şi la o distanţă pe care Eratostene o calculează la 5 040 de stadii (adică 794 km) şi despre care ştim azi că e de 5 330 de stadii (adică 846 km).

Cu tabelele sale trigonometrice, Eratostene calculează şi distanţa de la Pământ la Lună şi la Soare, aceasta din urmă cu foarte bună precizie. În fine, directorul Bibliotecii inventează cuvântul „geografie" pentru a indica studiul Pământului, şi foloseşte coordonatele sferei (latitudinea şi longitudinea) în manieră atât de sistematică încât azi încă e considerat fondatorul geografiei fizice sau, dacă vreţi, al geografiei ştiinţifice.

Eratostene e, cu siguranţă, o figură extraordinară, dar nu e singurul de acest calibru în Alexandria. Muzeului şi Bibliotecii li se alătură o constelaţie de matematicieni, astronomi şi savanţi preocupaţi de ştiinţele naturale, care realizează o adevărată revoluţie: activităţile lor corelate produc în mod riguros şi sistematic acea reţea inextricabilă de teorii, observaţii, descoperiri şi aplicaţii tehnologice pe care o numim „ştiinţă".

În *Revoluția uitată*, Lucio Russo demonstrează că în epoca elenistică, şi anume în Alexandria, s-a născut ştiinţa modernă – în orice caz, ceva ce are toate caracteristicile epistemologice pe care le atribuim azi unui tip de activitate de cercetare a matematicii şi a naturii.

Totuşi, de ce se naşte ştiinţa în epoca elenistică, şi tocmai la Alexandria?

Pentru că, susţine Lucio Russo, aici şi acum, în Alexandria Ptolemeilor, gândirea raţională şi filozofia naturală a grecilor întâlnesc avansata tehnologie egipteană. Contaminarea aceasta între raţiunea pură şi tehnică, între cercetare iscată de curiozitate şi cercetare orientată de necesităţi e cea care produce ştiinţa. O activitate bazată, după cum spunea Galilei, pe „anumite demonstraţii“ (teoriile, eventual matematizate) în strânsă corespondenţă cu „experienţe cu sens“, realizate prin intermediul celor cinci simţuri ale noastre, dar şi cu ajutorul unor instrumente construite cu pricepere *ad hoc*. Această combinaţie structurată constituie partea esenţială şi indivizibilă a activităţii ştiinţifice.

Şi tot cu această combinaţie structurată devine ştiinţa pentru prima dată „mama mamei sale“, tehnologia; devine deci o activitate raţională care cercetează natura, fiind în stare să răspundă unei cerinţe economice şi sociale precise: inovarea tehnologică sistematică. Cerinţă prezentă în societatea elenistică, în Alexandria Egiptului, dar nu numai.

REVOLUȚIA ŞTIINȚIFICĂ

Ştiinţa înţeleasă în sens modern se naşte aşadar între Mediterana şi Ind într-o perioadă precis delimitată: după cucerirea şi unificarea vechilor imperii de către Alexandru. Eudoxos a

fost un antemergător, dar știința nu „explodează“ decât în secolul III î.C., iar centrul ei cel mai important e fără nici un dubiu Alexandria Egiptului. Se face însă știință de calitate și în multe alte orașe, între care Siracuza, Rhodos, Pergam.

Știința e o activitate socială complexă care nu se reduce la o succesiune de câteva fulgere sclipitoare care pâlpâie pe un cer altminteri întunecat și senin. Totuși, asemenea fulgere ale cunoașterii – geniile care imprimă procesului accelerații extraordinare – există. Putem deci susține că, în afară de Eratostene, protagoniști ai „revoluției științifice elenistice“ sunt câteva genii absolute, precum matematicienii Euclid și Arhimede, astronomii Aristarh și Hiparh, medicii Herophilos și Erasistrate. Dar ce se formează în prima epocă elenistică e o adevărată comunitate științifică extinsă, cu propriul ei sistem de comunicare și cu un sistem de valori împărtășite, capabilă să pună în mișcare viața culturală, dar și pe cea socială și economică a Egiptului, a Greciei, a Persiei, până la Ind. Și care reverberează până în India și China.

Cât despre comunitatea științifică elenistică, nucleul ei originar și componenta cea mai relevantă se adună în jurul Muzeului și al Bibliotecii voite în Alexandria de Ptolemeu, generalul macedonean care preia controlul Egiptului în 306 î.C. Printre înfăptuirile lui cele mai semnificative e tocmai începerea lucrărilor pentru a înzestra Alexandria cu o Bibliotecă și un Muzeu înțelese nu doar ca locuri statice de conservare a cărților și obiectelor, ci ca locuri dinamice de formare și de cercetare. Ptolemeu invită la Alexandria intelectualii cei mai renumiți ai Mediteranei și ai Orientului Mijlociu, inclusiv matematicieni, astronomi, medici. Creează astfel primul institut public de cercetări și primul nucleu cunoscut al unei comunități științifice.

O comunitate autentică, nu doar formală. Pe lângă Bibliotecă și Muzeu se desfășoară o activitate socială intensă:

se lucrează și se trăiește în același loc, se mănâncă în comun, se discută, se convine asupra regulilor dialectice. Un medic, Herophilos de exemplu, și un matematician, să zicem Euclid, se pot întâlni zilnic, iar din întâlnirile lor se naște o interdisciplinaritate naturală: nu întâmplător e medicina lui Herophilos atât de impregnată de logica matematică a lui Euclid.

Alexandria e principalul, dar nu singurul centru relevant. Comunitatea științifică elenistică e mult mai întinsă decât cea prezentă în marele oraș african. Comunitatea nu e fragmentată, ci constituie o rețea continuă care se bazează pe un sistem de comunicații fondat nu doar pe relații *vis à vis*, ci mai ales pe corespondență scrisă și pe suluri. Nu e întâmplător că până atunci nimeni nu mai văzuse o bibliotecă de asemenea dimensiuni: pe vremea lui Ptolemeu II număra deja 400 000 de volume, iar în 48 î.C., în timpul primului incendiu distrugător, avea peste 700 000. Și nu doar o elită are de-a face cu acest corpus de cunoștințe; el e, cel puțin în intenție, oferit tuturor: o secție a Bibliotecii, Serapeul, e deschisă publicului și are în secolul III î.C. peste 42 800 de volume.

Toate acestea nu sunt fructul despotismului luminat al Ptolemeilor. Nimeni nu organizase atâția doxografi, copiști, secretari, biografi și cronografi pe câți se aflau în centrul de cercetări, mai ales filologice, voit de un alt general al lui Alexandru, Attalos, ajuns rege al Pergamului, în Asia Mică. Aici, în 180 î.C., e pus la punct un nou material pentru scriere, pergamentul, capabil să înlocuiască fragilul papirus, ușor deteriorabil. Și Pergamul are o bibliotecă mare și o activitate științifică intensă care rivalizează cu cele din Alexandria. E interesant de notat că pergamentul a fost inventat de nevoie, atunci când Ptolemeii au blocat exportul papirusului din

Egipt, iar în Asia Mică oamenii de știință și tehnicienii căutau disperați un sistem pentru a continua să scrie.

După cum veți fi înțeles, textul scris are un rol cu adevărat decisiv în construcția culturii elenistice, care nu se fragmentează în atâtea insule, orașele-stat, ci, prin voința aceluiași Alexandru cel Mare, are o vocație universală în care Grecia și Orientul, culturi și popoare diferite, se topesc într-o unică, măreață civilizație care depășește granițele politice.

Pe de altă parte, această civilizație mediteraneană și mediorientală unificată poate conta pe o limbă comună, care e cea greacă, dar o limbă greacă profund inervată cu termeni și neologisme, mai ales de natură științifică, egipteni, fenicieni, persani, indieni. Știința devine unul dintre firele principale ale urzelii culturii elenistice.

Să revenim însă în Alexandria din Egipt. În Muzeu, lângă Bibliotecă, sunt puse la punct diferite săli anatomice, un observator astronomic, o grădină botanică, o grădină zoologică: ceea ce spune aproape explicit că textul scris nu poate fi separat de observarea științifică a naturii.

Unul dintre primii directori ai Bibliotecii a fost marele matematician și astronom Eratostene din Cirene. Un intelectual cu adevărat versatil. Ca matematician, e printre cei dintâi care dezvoltă un sistem general pentru a stabili lista numerelor prime și e primul care rezolvă problema duplicării cubului. În acest scop, Eratostene furnizează primul exemplu de noutate din știința elenistică: trece în revistă toate tentativele precedente de rezolvare, oferă demonstrația sa și pune la punct un instrument tehnic, mezolabul (un precursor al riglei de calcul), capabil să rezolve foarte simplu și la îndemână diferite probleme practice. Ca astronom, Eratostene a demonstrat oblicitatea eclipticei (adică a planului în care stă orbita terestră față de sfera celestă); a

calculat distanțele relative ale Soarelui, Pământului și Lunii; a catalogat aproape 700 de stele. Și, mai ales, a fondat geografia științifică, punând la dispoziție, între altele, măsurători extrem de precise ale dimensiunii Pământului și chiar ale sistemului solar.

Dar nașterea explozivă a științei elenistice produce și alte rezultate excepționale de nivelul celor ale lui Eratostene, ba chiar mai importante: în matematică, de exemplu, care exact în secolul III, la Alexandria, își trăiește „vârsta de aur". Unul dintre protagoniștii absoluți ai acestei perioade de aur matematice e Euclid, invitat de Ptolemeu la Alexandria tocmai pentru a preda, a studia și a crea matematică. Deoarece, după cum observă Carl Boyer, Muzeul nu e chiar foarte diferit de un institut modern de învățământ și cercetare, rezultă că are dreptate Peter Higgins când susține că Euclid e primul director din lume al unui departament de matematică (vezi *O lume matematică. De la piramidele egiptene la minunile Alhambrei*).

Vom vorbi curând despre Euclid. Și tot curând ne vom întoarce la Arhimede. Deocamdată să spunem că alt mare matematician al perioadei elenistice e Apoloniu din Perga. E contemporan cu Arhimede, cu care-și dispută faima – deloc nemeritată. Opera sa principală privește *Secțiunile conice*, entități geometrice cărora le definește proprietățile fundamentale, introducând termenii și conceptele de *elipsă*, *parabolă* și *hiperbolă*. Apoloniu elaborează și un sistem pentru calculul numerelor mari, în bună măsură echivalent cu al lui Arhimede. Dar cea mai mare parte a scrierilor lui s-a pierdut. Ceea ce s-a păstrat însă și ce ne-a transmis Pappus (activ în Alexandria în jurul lui 320) e suficient ca să merite un capitol întreg în *Istoria matematicii* a lui Carl Boyer, întocmai ca Arhimede și Euclid.

Cei trei sunt de departe exponenţii maximi ai matematicii elenistice. Dar sigur că nu epuizează tabloul. În această perioadă, de exemplu, se dezvoltă şi trigonometria, care nu poate fi atribuită precis muncii unei singure persoane. În general, putem sublinia că în lumea elenistică a secolului III î.C. se pun bazele ştiinţei matematice, care se şi se dezvoltă puternic.

Nu numai matematica explodează în secolul III î.C. Am menţionat deja că Eratostene fondează geografia ştiinţifică, iar Arhimede fizica modernă. Realitatea e că se dezvoltă un ansamblu de cunoştinţe „exacte" nu foarte rigid delimitate în compartimente disciplinare.

Un domeniu important de studiu e, de exemplu, astronomia. În secolele III şi II studiul cerului primeşte un impuls extraordinar din partea, mai ales, a două personaje: Aristarh şi Hiparh. Primul propune, cu două mii de ani înaintea lui Copernic, teoria heliocentrică. Cel de-al doilea trăieşte şi lucrează în Rhodos, unde conduce un adevărat observator, chiar dacă, desigur, instrumentul optic e ochiul liber, instrument utilizat de el cu răbdare şi pe care-l potenţează cu ajutorul matematicii. Într-adevăr, Hiparh dezvoltă trigonometria şi o aplică în astronomie obţinând cel puţin trei rezultate foarte importante: redactează un catalog care cuprinde 1 080 de stele plasate cu precizie pe harta cerului şi clasificate pe baza luminozităţii; descoperă „precesia echinocţiilor", adică deplasarea ciclică (ciclul durează 26 000 de ani) a axei de rotaţie a Pământului faţă de mişcarea diurnă a stelelor fixe; dezvoltă o „teorie a mişcărilor planetelor" care e cu siguranţă geocentrică, dar se bazează pe excentrice, nu pe epiciclurile preferate de Apoloniu.

Hiparh trebuie considerat şi fondatorul, alături de Eratostene, al geografiei ştiinţifice. Dacă, într-adevăr, Eratostene

folosește sistematic în matematică coordonatele sferice (longitudine și latitudine) pentru a realiza hărți precise ale lumii cunoscute, Hiparh studiază diferențele dintre mareele din Oceanul Indian și din Oceanul Atlantic, deducând că trebuie să existe un continent care să le separe (astăzi știm că acel continent există, anume America). Potrivit reconstrucției propuse de Lucio Russo în *America uitată*, Hiparh chiar cunoaște existența acelui continent – care pare să fi fost descoperit și frecventat cu regularitate de cartaginezi – și calculează cu precizie incredibilă coordonatele geografice corecte ale Antilelor Mici și Groenlandei.

Dar revoluția științifică nu privește doar matematica, fizica (mecanica, optica, hidrostatica, pneumatica și astronomia) și geografia (de la topografie la geodezie): ea privește și celelalte discipline. De la botanică – în primul rând Teofrast, elev al lui Aristotel și succesor al lui la conducerea Liceului din Atena – până la chimie. Privește în mod special medicina, dominată până atunci de figura lui Hipocrate și de teoria sa a umorilor. Herophilos din Calcedon, considerat fondator al școlii medicale din Alexandria, practică medicina clinică cu o metodă pe care am putea-o defini drept modernă, dar, mai ales, inaugurează anatomia umană științifică, disecând cadavre, și anatomia comparată, analizând în paralel organe și sisteme ale oamenilor și ale animalelor. Activitatea de cercetare a lui Herophilos e rafinată, tot la Alexandria, de Erasistrate, originar din Ceos, adept convins al abordării mecaniciste a fiziologiei. Studiile sale anatomice îi permit să distingă două tipuri de vase care traversează corpul uman, arterele și venele, cu funcții diferite. Dincolo de rezultatele obținute, medicina elenistică se distinge de cea hipocratică prin natura sa științifică, concretizată în teorii generale și observații directe.

Ştiinţa elenistică e deci caracterizată de o mare organicitate şi e profund unitară. Toate disciplinele sunt interconectate. Matematica şi fizica sunt practic una. Celelalte ştiinţe exacte se referă la matematică şi au oricum aceeaşi înfăţişare epistemologică.

ALEXANDRIA, ŞTIINŢA ŞI TEHNOLOGIA

Poate părea exagerată atenţia pe care o acordăm, într-o poveste dedicată lui π, ştiinţei elenistice şi Alexandriei. Nu este aşa. Avem nevoie de ele pentru a-l înţelege mai bine pe Arhimede, figura celui care, în povestea lui π, a avut un rol major. Ştim că Arhimede e un mare teoretician, fizician şi matematician, mai mult, fizico-matematician. Lui, mai mult decât oricui altcuiva, îi datorăm ideea că universul fizic poate fi cunoscut prin intermediul matematicii. Şi tot lui, poate, mai mult decât oricui altcuiva, îi datorăm şi ideea că prin tehnologie putem aprofunda cunoaşterea universului fizic.

Civilizaţia care generează ştiinţa modernă conştientizează ideea că e nevoie de noi instrumente tehnologice pentru a obţine cunoştinţe noi despre lume şi pentru a amplifica posibilitatea de a „interoga natura". Se pare că ar fi fost tocmai Arhimede cel care a construit un planetariu mecanic – capabil să descrie mişcarea planetelor pe cer şi să prevadă cu precizie maximă datele eclipselor. Dar raportul dintre ştiinţă şi tehnologie e biunivoc. Una e mama celeilalte. Şi una e fiica celeilalte. Într-adevăr, cunoaşterea fizică produce, la rândul ei, tehnologie. Şi nimeni n-o demonstrează practic mai bine decât Arhimede, cu inventarea şi folosirea oglinzilor incendiatoare, a şurubului pentru a ridica apa, a scripetelui mobil şi a sistemului extins de pârghii pentru ridicarea sarginilor grele, sau cu inventarea

şurubului fără sfârşit, folosit la lansarea unei mari nave cerute de Heron II.

Arhimede trăieşte într-o perioadă crucială a istoriei, nu doar a Siciliei şi a Mediteranei, ci, poate, a întregii lumi: perioada expansiunii Romei. El se află la Siracuza şi participă activ la apărarea ei când soldaţii romani, în timpul celui de-al doilea Război Punic, asediază oraşul. Maşinile sale de război (mai ales catapultele) sunt arma cea mai importantă pe care o au asediaţii care, nici cu ele, nu reuşesc să schimbe soarta bătăliei: Siracuza e înfrântă, iar în 212 î.C. cel mai mare savant al Antichităţii e ucis de un soldat roman care nu-l recunoscuse. Acel soldat e oarecum emblema Romei, care nu recunoaşte valoarea ştiinţei elenistice şi, de fapt, o uită.

Se pare că Cicero, un secol şi jumătate după căderea Siracuzei, ar fi găsit mormântul lui Arhimede şi ar fi pus să fie restaurat. Carl Boyer notează, cu ironie apăsată, că aceasta poate fi considerată contribuţia maximă adusă de Roma matematicii.

Să ne oprim însă aici şi să încheiem acest paragraf despre raportul ştiinţă–tehnologie reafirmând că în epoca elenistică cunoaşterea ştiinţifică e strâns legată de societate şi că se propune ca sursă primară de inovaţie tehnologică, cu efecte concrete asupra economiei.

Acum ne putem întoarce la matematică şi la povestea lui π.

EUCLID

Printre atâtea genii care frecventează Alexandria, cel mai mare e cu siguranţă Euclid. Nu-i cunoaştem în întregime viaţa. Ştim că a încălecat secolele IV şi III, că s-a născut, cel

mai probabil, în 367 î.C., doisprezece ani după moartea lui Eudoxos, şi că a murit în 283 î.C., când Arhimede avea doar 4 ani. Ştim că a scris numeroase cărţi, dintre care au ajuns până la noi doar cinci. Ştim că îl interesa şi optica, dovadă că, încă de la început, ştiinţa elenistică nu tinde să ridice ziduri între discipline şi să se împartă în compartimente separate. Dimpotrivă, savanţii elenişti interoghează natura în toate dimensiunile ei, inclusiv în aceea imaterială a numerelor şi a formelor geometrice, încercând să conecteze, nu să separe, diferitele domenii de cercetare. Ceea ce nu înseamnă că mulţi dintre ei nu excelează în sectoare specifice, şi nici că Euclid nu ar excela mai ales în aria matematicii şi a geometriei.

Dintre cele cinci opere ale lui Euclid ajunse până la noi, una se ridică deasupra tuturor: *Elementele de geometrie*. Opera, în 13 cărţi, a fost menită să structureze matematica tuturor secolelor următoare: azi încă ne referim la acest text atunci când ne apropiem de matematică şi de geometrie. Scrise tocmai pentru a furniza elementele de bază nu doar ale geometriei, ci şi ale teoriei numerelor şi algebrei, *Elementele* sunt, după Biblie, opera cea mai citită, studiată şi tradusă din toate timpurile.

Şi pe bună dreptate, din moment ce cu această lucrare Euclid pune piatra de temelie a geometriei moderne şi inaugurează în matematică metoda demonstrativă. *Elementele* sunt importante nu numai pentru teoremele conţinute, multe dintre ele fiind deja cunoscute, ci mai ales pentru metodă. Practic, Euclid pune în evidenţă câteva axiome (cinci) propuse ca „adevăruri“ nedemonstrabile, apoi, folosind riguros logica ipotetic-deductivă, demonstrează o serie de „adevăruri“ consecutive. Folosim şi azi această metodă – în toată matematica, nu doar în geometrie – care, principial şi în fapt,

permite ca din puţine axiome autoevidente să obţinem o reţea infinită de teoreme. Mai mult, metoda lui Euclid, interpretată în manieră extinsă, se află şi la originea ştiinţelor naturale exacte. Graţie acestei metode, matematica devine ştiinţă în sens modern, iar *Elementele* pot fi considerate prima operă ştiinţifică din istorie. Oricum, e sigur că nici o altă operă nu a avut în domeniul ştiinţei implicaţii atât de generale şi de profunde.

Pentru a pune bazele geometriei, Euclid foloseşte elemente extrem de simple. În fond, geometria lui, după cum aminteşte Lucio Russo, e teoria ştiinţifică a desenelor care se pot trasa numai cu rigla şi compasul.

Cum se naşte metoda euclidiană?

Ne-o spune tot Lucio Russo. În matematica Greciei clasice există trei tipuri de probleme.

Primul: anumite afirmaţii evidente despre unele figuri geometrice pot avea implicaţii logice deloc evidente. Asta impune necesitatea de a ne îndrepta atenţia asupra unei metode demonstrative riguroase. E totuşi o problemă, spune Aristotel: dacă totul trebuie demonstrat, atunci fiecare demonstraţie trimite cel puţin la o alta, şi tot aşa la infinit.

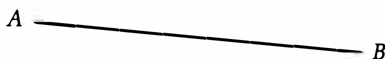
Al doilea: paradoxurile şi aporiile puse în lumină de şcoala lui Pitagora şi de şcoala sofiştilor demonstraseră că unele concepte aparent evidente ca spaţiul, timpul, infinitul, continuul, discretul trebuie organizate în mod raţional.

Al treilea: trebuie definită într-o manieră riguroasă corespondenţa dintre entităţile matematice imateriale şi obiectele din lumea reală.

Euclid porneşte la rezolvarea acestor trei probleme. Pe prima, de exemplu, o rezolvă construind întregul corp matematic pornind de la puţine entităţi fundamentale (punct, dreaptă, plan) şi definindu-le riguros pe celelalte (cercul,

unghiul drept, dreptele paralele). Marele geometru elenist evită necesitatea demonstrațiilor care tind la infinit, propunând ca întreaga geometrie să fie dedusă plecând de la numai cinci „postulate“ referitoare la aceste entități. Cinci adevăruri autoevidente care nu au nevoie de demonstrație. Descrise în cuvintele de azi, ele sunt:

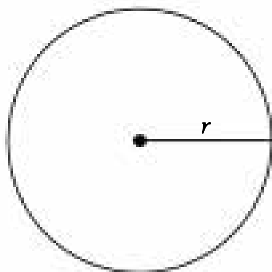
1. prin două puncte oarecare se poate duce o dreaptă, și, prin aceste două puncte, se poate duce o singură dreaptă;



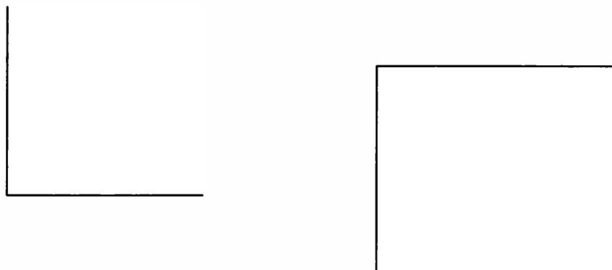
2. dreapta trecând prin aceste două puncte poate fi prelungită la infinit;



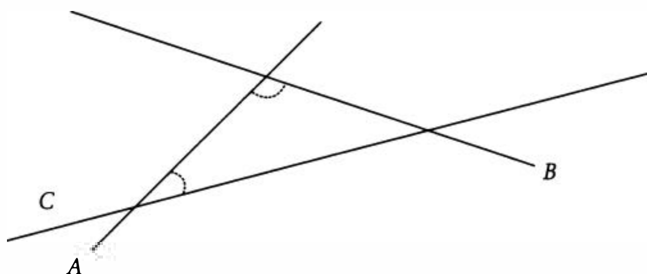
3. date un punct și un segment, se poate întotdeauna obține un cerc;



4. toate unghiurile drepte sunt egale;



5. dacă o dreaptă (*A*) care intersectează alte două drepte (*B*, *C*) și formează de aceeași parte unghiuri interne mai mici decât unghiurile drepte, atunci dreptele *B* și *C*, dacă sunt prelungite la infinit, se întâlnesc de acea parte în care unghiurile sunt mai mici decât două unghiuri drepte.



După cum se vede, Euclid acordă un rol fundamental în geometrie unor entități care au mult de-a face cu π al nostru: dreapta și circumferința. Motivul e foarte simplu: ele sunt modele matematice simple ale liniilor trasabile doar cu rigla și compasul.

Dar Euclid intră cu drepturi depline în povestea lui π nu doar pentru că e cel mai mare geometru al tuturor timpurilor, dar și pentru că reia metoda exhaustiei a lui Antifon și apoi a lui Eudoxos, pentru a susține că diferența dintre aria

unui cerc şi cea a unui poligon regulat înscris în acel cerc poate fi redusă oricât de mult. O formulare corectă care anunţă conceptul de limită. Aşadar, pe Arhimede.

REVENIND LA ARHIMEDE

Dacă cel mai mare geometru al Antichităţii şi al tuturor timpurilor e, cu siguranţă, Euclid, cel mai mare matematician şi primul fizician matematician în absolut e, la fel de sigur, Arhimede, care trăieşte şi lucrează la Siracuza, chiar dacă frecventează şi Alexandria. În oraşul african studiază în tinereţe, probabil cu elevi de primă generaţie ai lui Euclid, poate că revine de mai multe ori ca adult şi, în orice caz, rămâne în contact, prin intermediul unei corespondenţe asidue, cu comunitatea Bibliotecii şi, în particular, cu Eratostene, care-i e prieten.

Pe bună dreptate, Arhimede poate fi considerat fondatorul mecanicii. Nu pentru că ar fi fost primul care să vorbească despre fenomene mecanice, ci pentru că a fost primul care a făcut-o în termeni ştiinţifici, matematizaţi, bine definiţi din punct de vedere formal. Într-adevăr, în faimoasa lucrare *Despre echilibrul planelor*, în care e vorba, între altele, despre pârghii, atacă problemele fizicii exact aşa cum atacase Euclid înainte problemele geometriei. Din două mulţimi de postulate simple, Arhimede deduce o serie de propoziţii fizice, „stabilind astfel – scrie Carl Boyer – acea relaţie strânsă dintre matematică şi mecanică atât de importantă în viitor şi pentru fizică, şi pentru matematică“.

La fel, cu aceeaşi metodă, Arhimede fondează hidrostatica. Pleacă de la un postulat şi obţine o serie de consideraţii, întotdeauna cantitative, care merg de la principiul plutirii

corpurilor până la densitatea specifică a materialelor. Opera de referință în acest caz e *Despre plutirea corpurilor*.

În matematică, Arhimede propune, în *Calculul firelor de nisip*, un sistem pentru manipularea lesnicioasă și calculul numerelor mari, cu o metodă pozițională, echivalentă cu notația noastră exponențială. Își folosește metoda, printre altele, pentru a exprima rezultatul calculelor sale privind numărul firelor de nisip necesare pentru a umple universul. În tratatul *Despre măsurarea cercului* propune, cu metoda exhaustiei, tema cuadraturii cercului și, de fapt, introduce acea idee de limită care stă azi la baza analizei matematice. Cu aceeași metodă a exhaustiei propune *Cuadratura parabolei*. În lucrarea *Despre sferă și cilindru* demonstrează, printre altele, că volumul unei sfere e egal cu 2/3 din volumul unui cilindru în care e înscrisă. Rezultat remarcabil de care, se pare, era foarte mândru, într-atât încât a cerut să-i fie pus în chip de epitaf pe mormânt. În tratatul *Despre spirale*, poate cea mai dificilă operă a sa, nu calculează doar aria subîntinsă de o spiră a spiralei, ci anticipează o metodă care, două mii de ani mai târziu, va sta la baza geometriei diferențiale.

În legătură cu metodologia, *Metoda* a fost descoperită abia în 1906. E o lungă scrisoare adresată lui Eratostene, în care Arhimede explică în detaliu principalele metode cu care se obțin rezultatele expuse în cărțile sale.

Iată deci cadrul intereselor personale și climatul cultural în care Arhimede se interesează de numărul π, studiază rezultatele obținute de cei dinaintea lui, de la Eudoxos la Euclid, obține valoarea mai precisă a raportului dintre circumferință și diametru și pune bazele acelui calcul infinitezimal care, o mie nouă sute de ani mai târziu, îi va face faimoși pe Isaac Newton și Gottfried Leibniz.

Că π are un rol de prim-plan în matematica ştiinţifică ce tocmai se naşte se vede din faptul că, în afară de Euclid şi Arhimede, se interesează de el şi Apoloniu care, cu metoda lui Arhimede, reuşeşte să calculeze o valoare mai precisă decât a acestuia:

$$\pi = 3 + \frac{17}{120} = 3,14167.$$

5. După Arhimede

ROMA: FĂRĂ MATEMATICĂ

„Uciderea lui Arhimede de către un soldat roman va fi fost accidentală, dar a fost cu adevărat premonitorie. Pe parcursul îndelungatei sale istorii, Roma antică a dat puţine contribuţii la ştiinţă şi filozofie, încă şi mai puţine la matematică.“

Pentru a ne convinge că Roma a ignorat matematica – ba chiar ştiinţa –, cum nemilos susţine Carl Boyer, e de-ajuns să spunem că *Elementele* lui Euclid nu au fost traduse în latină decât şase secole şi jumătate după căderea Imperiului Roman de Apus, în 1120, direct din arabă şi prin munca unui englez, Abelard din Bath.

Odată cu luarea Siracuzei (212 î.C.) şi, mai ales, după distrugerea Corintului şi a Cartaginei (146 î.C.), adică începând cu secolul II î.C., Roma cucereşte lumea greacă. Dar e cucerită de cultura grecilor. Toţi oamenii cultivaţi din emergenta putere latină învaţă limba greacă şi sunt influenţaţi de arta şi de filozofia greceşti. Cu toate acestea, în o mie de ani de istorie romană nu apare nici măcar un om de ştiinţă latin. Evident, mulţi intelectuali romani vorbesc despre ştiinţă – de la Varro la Vitruviu, de la Seneca la Plutarh –, alţii nu doar vorbesc, ci manifestă şi o anumită curiozitate

științifică, Pliniu cel Bătrân, de exemplu; în timp ce alții, ca Lucrețiu, cugetă uimiți la întrepătrunderile dintre filozofie și poezie. Dar nu găsim nici un latin care să facă studii științifice și să obțină rezultate originale notabile.

Are dreptate Carl Boyer: Roma nu se întâlnește cu știința.

Abia la o mie cinci sute de ani după Arhimede se va naște și va lucra în Europa un matematician creativ, pisanul Leonardo Fibonacci. Între timp, Roma și-a edificat, apoi și-a văzut distrus imperiul său lipsit de știință.

Printre cauzele declinului Romei se numără, cel mai probabil, și slaba capacitate de inovare tehnologică. Această absență a inovării, și în epoca republicană, și în timpul imperiului, e determinată de o economie bazată pe sabie și pe plug, pe o armată foarte bine organizată și pe o agricultură sclavagistă, iar nu pe știință și tehnică. Dar analiza cauzelor căderii Imperiului Roman depășește în mod evident scopul acestei cărți. Să rămânem deci la fapte. Iar faptele spun că la Roma matematica n-are trecere, iar științele naturale aproape că nu sunt practicate.

Ceea ce nu înseamnă că după 146 î.C. în aria mediteraneană încetează orice activitate de cercetare în matematică și în științele naturii. Dimpotrivă, Alexandria rămâne pentru mai bine de jumătate de mileniu centrul științific al lumii. Evoluția sa se încheie abia în 415, odată cu asasinarea de către fanatici creștini a Hypatiei, fiica unui mare matematician, Theon, la rândul ei mare filozoafă, matematiciană și femeie de știință.

În mare, știința elenistică poate fi împărțită în trei perioade. Cea zisă de aur, a lui Euclid, Arhimede și Apoloniu (secolele IV și III î.C.); aceea finală, a apusului, a lui Theon și a Hypatiei (secolele IV și V); și o a doua perioadă, numită de unii de argint, de alții a crepusculului, care se dezvoltă

între secolele I şi III d.C. E perioada în care, în medicină, iese în prim-plan figura lui Galen, născut la Pergam în 129 şi mort la Roma în 199; iar în matematică, astronomie şi geografie activează Claudiu Ptolemeu, născut la Pelusium, în delta Nilului, pe la anul 100, şi mort în Alexandria, după 170.

În lucrările sale, Ptolemeu se loveşte adesea de numărul π. Dar nu aduce nimic nou în privinţa lui sau a metodei de calcul. Se mărgineşte să folosească valoarea deja calculată de Apoloniu:

$$\pi = 3 + \frac{17}{120} = 3.14167$$

În realitate, în această perioadă de argint sau crepusculară a ştiinţei elenistice apar, şi nu doar la Alexandria, mulţi matematicieni valoroşi, ca Heron, autor al unui apreciat comentariu la *Elementele* lui Euclid, matematician creativ şi constructor extraordinar de mecanisme. Mai târziu, în epoca zisă târziu-elenistică, aceea a apusului ştiinţei elenistice, tot la Alexandria vor lucra matematicieni de calibrul lui Diofant (secolul III) şi Pappus (secolul IV). Sigur că nici unul dintre ei nu-l egalează pe Apoloniu, nici pe Euclid sau Arhimede. Dar sunt matematicieni creativi şi cu greutate. Diofant, de exemplu, e considerat „părintele algebrei". Ei bine, nici unul dintre matematicienii ultimelor două perioade ale ştiinţei elenistice – nici Ptolemeu, nici Heron, nici Diofant sau Pappus, nici Theon sau Hypatia – nu sunt preocupaţi în mod particular de π. Îl folosesc, dar, ca să spunem aşa, nu-l iau la întrebări.

Timp de secole, în bazinul Mediteranei, cercetările cele mai avansate asupra lui π rămân cele ale lui Arhimede.

Oricât de mare ar fi universul elenistic (în sens geografic și cultural), lumea nu se termină între Alexandria și Pergam, nici între Rhodos și Siracuza. Se practică matematică și în alte locuri, în alte civilizații. Toate cele avansate (orice am înțelege prin acest adjectiv) ajung să se lovească de circumferințe și diametre. Toate recunosc că raportul dintre cele două entități e constant. Așadar, toate cunosc și „cântăresc" acel număr pe care noi îl numim π.

Îl găsim, de exemplu, în Biblie. Semn că era cunoscut evreilor din timpuri străvechi. Mai precis, în *Cartea regilor* din Vechiul Testament, compusă pe la 550 î.C., i se atribuie în grabă valoarea 3. Cu siguranță, evreii nu sunt o populație izolată, iar civilizația lor nu e imună la contaminări profunde, inclusiv cu aceea greacă. În alți termeni, în secolele care au urmat scrierii *Cărții regilor* ei se vor familiariza cu cultura elenistică și cu valoarea lui π calculată de Arhimede și de Apoloniu. Avem dovada. În secolul II, în timp ce la Alexandria lucrează Claudiu Ptolemeu, în Palestina, rabinul și matematicianul Neemia (secolul II) se întreabă, din punct de vedere teologic, care valoare trebuie acceptată: 3, cum scrie în *Cartea regilor*, sau 3,1412, cum calculează Arhimede. Și își cam prinde urechile, încercând să demonstreze că valoarea „adevărată" e cea a lui Arhimede, dar că, în același timp, Biblia nu greșește.

În cu totul altă parte a planetei, mayașii cunosc existența raportului constant dintre circumferință și diametru și-i calculează valoarea numerică cu o precizie care, după unii savanți, e superioară celei la care ajunseseră egiptenii. Unii susțin că mayașii ar fi reușit să calculeze π până la a opta zecimală. Din păcate, aceste afirmații nu sunt coroborate

de dovezi indiscutabile. Toate documentele privind ştiinţa mayaşă s-au pierdut, arse pe ruguri de cuceritorii europeni. Păcat! Un păcat comis în 1560 de Inchiziţie şi, în particular, de episcopul Diego di Landa.

ÎN INDIA

Şi mare parte din documentele ştiinţei indiene s-a pierdut, chiar dacă din alte motive. Cele mai vechi texte disponibile sunt *Siddhānta*, publicate în jurul anului 400 d.C. Vorbesc despre filozofie, astronomie şi matematică. Cât priveşte ştiinţa numerelor, *Siddhānta* propun în general probleme şi soluţii nedemonstrate. Chiar şi aşa, acele probleme şi soluţiile lor sunt expresia unei matematici foarte avansate.

India e elementul de legătură între comunităţile stabile din estul, din centrul şi din vestul Eurasiei. Iar cultura populaţiilor care-o locuiesc resimte acest lucru, inclusiv cea ştiinţifică. Într-adevăr, ştiinţa indiană e contaminată de culturile ştiinţifice occidentale şi orientale, având două puncte forte: astronomia şi, mai ales, matematica.

Astronomia indienilor e, după cum susţine Johan L.E. Dreyer în a sa *Istorie a astronomiei de la Thales la Kepler*, o ramificare a astronomiei alexandrine. Până la contaminarea elenistică, India practica o astronomie elementară. Abia după secolul III se afirmă cunoştinţe corecte în legătură cu mişcările planetelor şi o viziune cosmologică mai degrabă sofisticată: în *Siddhānta*, de exemplu, se explică bine că Pământul e o sferă suspendată în spaţiu.

Dar valori absolute atinge matematica hindusă. Până într-atât încât, în jurul primei jumătăţi a primului mileniu al erei creştine, în timp ce Imperiul Roman de Apus se

dezmembrează, India ajunge în avangarda culturii matematice mondiale. Cunoştinţele despre numere şi arta manipulării lor erau de fapt dezvoltate încă din secolul VIII î.C., chiar dacă originile acestor cunoştinţe sunt mult mai vechi, iar evoluţia lor are loc în paralel cu a matematicii din Mesopotamia, Egipt şi China. Cererea de noi cunoştinţe matematice e alimentată de nevoia de a formaliza construcţia templelor şi a altarelor, aşa că nu e surprinzător că în India, ca şi în Grecia, ştiinţa numerelor are origini geometrice. Cunoştinţele acestea sunt adunate în cartea *Śulvasūtra*, sau „regula corzii", a cărei primă versiune datează din secolul VIII î.C. La vremea aceea, indienii cunosc deja „teorema lui Pitagora" – o aflaseră de la babilonieni, probabil. Pe de altă parte, e bine documentată influenţa reciprocă dintre matematica babiloniană şi cea indiană.

Opinia cea mai răspândită printre istorici e că în toată perioada *Śulvasūtra*, adică până în secolul II d.C., indienii produc numai matematică elementară, dacă nu chiar primitivă, aplicând-o la comerţ şi astronomie. Dar e o percepţie care va fi, probabil, revizuită. În *Śulvasūtra* se găsesc, de fapt, probleme analoage acelora de care s-a ocupat Euclid. Sigur, e greu de spus dacă indienii s-au familiarizat cu ele înainte sau după Euclid; important e că nu sunt deloc probleme banale sau primitive.

În orice caz, perioada *Śulvasūtra* se încheie în secolul II d.C., când începe o nouă perioadă – un întreg mileniu, de la anul 200 până în 1200 – în care matematica indiană cunoaşte o dezvoltare intensă, devenind prima din lume. Noua perioadă îşi găseşte exprimarea în *Siddhānta*, scrise între sfârşitul secolului IV şi începutul secolului V.

Într-adevăr, urcarea pe tron a regelui Śrī-Gupta marchează nu doar începutul unei noi dinastii indiene, ci şi

debutul unui fel de „vârste de aur“, una culturală, nu numai economică şi socială. E o perioadă care porneşte în acelaşi timp cu renaşterea ştiinţei elenistice în Mediterana şi a ştiinţei chinezeşti din epoca Han.

Referirea nu e nici întâmplătoare, nici forţată. Pentru că, după cum spune Morris Kline, savanţii indieni demonstrează o creativitate bogată şi semnificativă abia după ce intră în contact cu matematica elenistică. Indienii înşişi recunosc cât de mult datorează Alexandriei. Astronomul Varāhamihira, citat de Kline, spunea: „Grecii, chiar dacă impuri, trebuie preţuiţi pentru că au fost educaţi în spiritul ştiinţelor şi excelează în ele deasupra tuturor celorlalţi. Ce să mai spunem despre un copil a cărui puritate se îngemănează cu înălţimea ştiinţei?“

Cu toate acestea, matematica hindusă se dezvoltă cu mare originalitate. În primul rând pentru că nu resimte doar influenţe elenistice, ci şi persane şi chineze. Astfel, dacă geometria indiană e cu siguranţă greacă aproape în întregime, algebra e împrumutată atât de la grecii elenistici, cât şi de la perşi, şi conţine urme evidente ale culturii algebrice chineze. Pe aceste cunoştinţe de bază venind din direcţii multiple se formează şi se dezvoltă originalitatea creativă a matematicienilor indieni. Spre deosebire de cea greacă, matematica hindusă e complet independentă de geometrie. Din acest motiv, în anumite chestiuni de vârf, cum e teoria şi gestiunea concretă a numerelor iraţionale (inclusiv π), matematicienii indieni obţin rezultate mai bune chiar decât marii matematicieni elenistici. Iar operaţiile lor algebrice sunt practic foarte asemănătoare cu ale noastre.

Cea mai mare parte a acestei matematici avansate se află în *Siddhānta*. De fapt, lucrarea e cunoscută în cinci versiuni diferite. Până la noi a ajuns doar ultima, *Romaka*

Siddhānta, scrisă în jurul anului 400. Conține și principalele doctrine astronomice indiene, care sunt de evidentă origine greacă, chiar dacă interpretate în lumina credințelor locale. O altă versiune, *Pauliśa Siddhānta*, scrisă în 380, a fost rezumată după aproape două secole de Varāhamihira și va fi mult citată de arabul al-Bīrūnī (973–1048), care sugerează o influență elenistică asupra cunoștințelor conținute.

Marii savanți din secolele acestea, pe care unii se încăpățânează să le considere întunecate, au deci percepția clară nu doar a existenței, dar și a influenței reciproce a marilor culturi din continentele alăturate. Arabi, indieni și chinezi se cunosc și sunt perfect conștienți de profundele influențe reciproce și de meritele vechilor oameni de știință elenistici.

Indienii din perioada de aur se află în strâns contact cu chinezii și învață geometria și trigonometria din surse elenistice – și se pricep bine la învățat. Dar, mai ales, produc cunoștințe noi. Ei sunt cei care, dezvoltând baza elenistică, introduc funcțiile și conceptele de sinus și cosinus în trigonometrie.

Apoi, faptul că primul mare matematician indian, Āryabhaṭa (476–550) – autor al *Āryabhaṭīya*, un volumaș în versuri în care sunt condensate cunoștințele astronomice și matematice din vremea sa – se naște la șaizeci de ani după moartea Hypatiei din Alexandria pare simbolul unei treceri ideale a ștafetei de la matematica elenistică la cea indiană. Într-un fel, atunci când în zona mediteraneană chiar încep secolele întunecate ale Evului Mediu, în India debutează perioada de maximă splendoare a secolelor de aur.

Progresul e evident. În *Āryabhaṭīya*, Āryabhaṭa discută matematică foarte avansată, la nivelul celei elenistice. Sigur, nu e o sistematizare teoretică și logică la nivelul celei

propuse de matematicienii mediteraneeni. Dar apare un element inovativ menit să lase o urmă permanentă în istoria matematicii şi a culturii mondiale: notaţia poziţională zecimală. Cu nouă cifre, demonstrează Āryabhaṭa, se poate scrie orice număr într-un mod economic.

Chiar dacă s-au apropiat într-un mod relativ sistematic de cultura elenistică, matematicienii indieni nu au fost interesaţi de geometria abstractă. În schimb, i-a interesat mult teoria numerelor. Indienii adună şi scad exact la fel cum facem noi azi. Cel mai mare matematician indian e probabil Brahmagupta (598–668): e primul despre care se ştie că a folosit numere negative şi a efectuat operaţii aritmetice cu numere negative. „De fapt, scrie Carl Boyer, opera sa prezintă primul exemplu de aritmetică sistematică cuprinzând numerele negative şi zero".

Printre altele, Brahmagupta a scris *Brāhmasphuṭa Siddhānta* în care propune o algebră cu adevărat avansată, cu soluţii generale ale ecuaţiilor de gradul al doilea. În plus, dezvoltă analiza nedeterminată a lui Diofant şi găseşte soluţii generale pentru unele dintre ecuaţiile diofantice, depăşindu-l pe matematicianul alexandrin. E deci un mare matematician creativ care iubeşte matematica pentru sine, nu doar pentru utilitatea sa – detaliu important în cercetarea ştiinţifică, pentru că, din raţiuni practice, nici un inginer nu şi-ar fi pus problemele abstracte pe care le atacă el.

În secolul VII, prin Brahmagupta, matematica indiană se află la zenit, dar asta nu înseamnă că după el nu mai există matematică şi mari matematicieni: sunt, de exemplu, Mahāvîra (secolul IX) şi Bhāskara (secolul XII).

Să revenim acum la raportul matematicii indiene cu π. Într-unul dintre cele mai vechi *Siddhānta*, cea din 380, ni se propune o valoare foarte precisă:

$$\pi = 3{,}1416$$

Textul nu spune cum s-a ajuns la ea. În 499, Āryabhaṭa își ia sarcina să dezvăluie metoda: ca s-o obții, trebuie să adaugi 4 lui 100, să înmulțești cu 8 și să mai adaugi 62 000. Aceasta e o foarte bună aproximare a unei circumferințe cu raza de 20 000 de unități. Astfel:

$$\pi = \frac{(4+100)\times 8 + 62000}{20000} = 3,1416$$

Ulterior, Bhāskara, născut în 1114, confirmă că aceasta e valoarea exactă a lui π, în timp ce ar fi greșită cea obținută adunând 3 cu 1/7 (adică 3,1429). Trebuie observat că valoarea calculată de Āryabhaṭa e exact aceea pe care noi, azi, o atribuim constantei atunci când o aproximăm la a patra zecimală. Dar trebuie spus și că Āryabhaṭa scrie la secole distanță de Arhimede și că indienii ar fi putut afla valoarea lui π și metoda de calcul chiar din textele învățaților elenistici. E probabil că exact cu metoda poligoanelor regulate înscrise într-un cerc ajunge Brahmagupta să propună:

$$\pi = \sqrt{10} = 3,162277,$$

valoare mai puțin precisă decât cea din *Siddhānta*, dar care e dovada faptului că matematicienii indieni continuă să cerceteze raportul dintre circumferința și diametrul unui cerc.

ÎN CHINA

La jumătatea primului mileniu, indienii sunt cei mai buni matematicieni din lume. Totuși cei care duc mai departe calculul valorii lui π, exact în secolul V, sunt chinezii: ajung

să calculeze corect până la a şaptea zecimală, ceea ce în Europa şi în restul lumii se va întâmpla abia în secolul XVI. De fapt, chinezii fac mult mai mult. Propun, sau poate doar repropun, o metodă universală pentru a calcula valoarea lui π cu nivelul de acurateţe dorit. Metodă limitată doar de abilitatea computaţională şi de perseverenţa cui o foloseşte: e metoda elaborată cu opt secole în urmă de Arhimede.

Cum au reuşit chinezii să reinventeze metoda lui Arhimede?

Nu putem reconstitui aici istoria civilizaţiei şi a ştiinţei chineze. Trebuie totuşi să demontăm teza prea multă vreme acreditată, potrivit căreia politica şi cultura Chinei erau închise, aproape impermeabile la fluxuri exterioare. Această izolare e mai curând un mit. De-a lungul mileniilor, China a fost întotdeauna în strâns şi continuu contact cu celelalte civilizaţii – şi nu doar cu cele apropiate geografic.

Adevărul e că cele două mari populaţii aşezate la marginile Eurasiei, cea mediteraneană şi cea chineză, s-au influenţat dintotdeauna.

Nu e întâmplător, de exemplu, că Confucius apare în China cam în acelaşi timp în care în Grecia apar primii filozofi, iar în India Buddha. Nici nu poate fi întâmplător faptul că de-a lungul dinastiei Han, cultura chineză cunoaşte o mare dezvoltare, mai ales în literatură, ştiinţă (cunoaşterea naturii, mai cu seamă) şi tehnică, una care pare să reproducă parcursul şi epocile civilizaţiei elenistice. Într-adevăr, între secolele III şi II î.C., împăraţii Han promovează o cultură ştiinţifică dincolo de chestiunile cu caracter practic, şi devine interesată, chiar păstrându-şi un pragmatism sănătos, de aspecte mai profunde. Apare astfel o clasă oficială de oameni şcoliţi, palatul imperial e dotat

cu o mare bibliotecă, e fondată o şcoală de studii superioare (Tai Xue). Analogia cu dinastia Ptolemeilor din Alexandria şi, mai general, cu alte dinastii elenistice e grăitoare.

Pe de altă parte, ca mai peste tot în bazinul mediteranean, mai ales oriental, cultura chineză e una care difuzează. Şcoli de stat există, de regulă, şi în provincii. Dar cel mai mult se dezvoltă în această perioadă ştiinţa şi tehnica: acum e inventată, de exemplu, hârtia (secolul II î.C.). Ca şi la Pergam, un număr din ce în ce mai mare de persoane care citesc şi scriu impune nevoia stringentă a unui suport mai comod decât mătasea sau tulpinile de bambus. Odată cu hârtia, se răspândeşte şi folosinţa tocului pentru scris. Iar ideogramele chinezeşti îşi capătă forma definitivă.

În timpul dinastiei Han se dezvoltă matematica şi unele ştiinţe ale naturii, ca astronomia, botanica şi zoologia, dar, mai ales, se afirmă o filozofie sceptică şi raţionalistă care-şi găseşte expresia maximă prin filozoful Wang Chong.

Apare în China şi o comunitate ştiinţifică recunoscută şi care are conştiinţă de sine. Împăratul Wang Mang, care întrerupe dinastia Han între anii 9–23, convoacă, de exemplu, ceea ce am putea numi prima adunare ştiinţifică din istoria chineză. Din toate părţile imensului imperiu sosesc peste o mie de astronomi, matematicieni, botanişti, pe lângă istorici şi filologi. Toţi sunt autorizaţi să folosească doi cai.

Ştiinţa chineză înregistrează deci o dezvoltare importantă în secolele I şi II d.C. Spre deosebire de ştiinţa elenistică, cea chineză e mai ales „aplicată", lipsită de teorii abstracte. Oamenii de ştiinţă chinezi nu elaborează modele generale bazate pe geometrie şi pe matematică.

Astfel, dacă matematicienii elenistici caută rigoarea absolută, chinezii se concentrează pe aplicaţiile practice. Pentru greci, universul matematic e independent de oameni,

obiectiv, sigur; pentru chinezi, e o mulţime unitară, cu anume coeziune care rezonează cu omul.

Să notăm că în secolul II activează doi dintre cei mai mari savanţi chinezi ai tuturor timpurilor. Unul e Zhang Heng (78–139), astronom şi matematician, autor, printre altele, al primului seismograf din lume (capabil să indice direcţia epicentrului, dacă nu şi intensitatea seismului); al unei hărţi a cerului care, cu 2 500 de stele catalogate, e chiar mai detaliată decât cea a lui Hiparh (de existenţa căreia Zhang nu ştie); al unui calcul foarte precis al valorii lui π. Al doilea mare savant e Zhang Zhongjing (152–219), medic, autor al acelui *Shang han lun* (*Tratat despre febre*) care încă stă la baza medicinii chineze. Influenţa lui Zhang asupra medicinii chineze e comparabilă cu a lui Galen asupra medicinii din regiunile mediteraneene.

După o perioadă de declin, inclusiv cultural, China cunoaşte, odată cu dinastia Tang din secolul VII, un fel de Renaştere. Perioada aceasta coincide cu reluarea contactelor cu Occidentul şi, mai ales, cu arabii. Împăraţii Tang reiau tradiţia raţionalistă a culturii confucianiste. În particular, dinastia Tang are grijă să reformeze şi să întărească universitatea, care pe la anul 650 numără deja 5 000 de studenţi. Împăraţii Tang sunt interesaţi de medicină şi de arte. Dar în perioada lor nu lipsesc oamenii de ştiinţă de mare valoare, precum călugărul I-Hsing (681–727), care a reuşit să calculeze destul de precis anul sideral (timpul necesar Soarelui pentru a efectua o rotaţie completă faţă de reţeaua de stele fixe). În înfloritoarea primă Renaştere chineză e recâştigată şi capacitatea de inovare tehnologică: acum încep să fie folosite acul magnetic şi tiparul, apar tehnici noi în fabricarea porţelanului şi în ingineria hidraulică. Nu e nici un dubiu că în secolul VIII, China are un potenţial

creator superior nu doar celui din teritoriile mai vestice ale Eurasiei, dar şi celui islamic şi oferă restului lumii mai mult decât primeşte.

În primul mileniu d.C. ştiinţa chineză are două momente de mare creativitate care coincid cu momentele de maxim contact cu Occidentul, anume cu romanii şi cu perşii în secolele I–II, cu arabii în secolul VIII.

Încă se mai discută dacă dezvoltarea aproape sincronă a ştiinţei în bazinul Mediteranei şi în China e paralelă şi independentă (teoria policentrică), sau e rodul răspândirii mai mult sau mai puţin întâmplătoare şi fragmentare a cunoaşterii elenistice în ariile orientale ale Eurasiei (teoria împrăştierii dintr-un unic centru originar). Încă se discută dacă ştiinţa e un „accident" survenit o singură dată (în epoca elenistică) sau dacă s-a născut de mai multe ori, în mod independent, în mai multe locuri.

Joseph Needham, englezul care a „redescoperit" vechea ştiinţă chineză, înclină către a doua ipoteză. Ştiinţa chineză s-ar fi născut în întregime în China, independent de cea elenistică. Totuşi, în *Ştiinţă şi civilizaţie în China* recunoaşte că „ştiinţa modernă, născută în urma unei extraordinare înlănţuiri de evenimente, se răspândeşte în toată lumea ca incendiul dintr-o pădure. Toate naţiunile o folosesc şi, la rândul lor, contribuie în grade diferite".

Cu totul altceva decât imperiu închis în sine! China e unul dintre motoarele dezvoltării civilizaţiilor în cele trei continente alăturate.

Mulţi cred totuşi că ştiinţa, aşa cum am definit-o, se naşte în lumea elenistică şi se răspândeşte în toată lumea (cu excepţia Europei occidentale). Toate naţiunile – Persia, India, China, lumea islamică – o folosesc şi-şi aduc contribuţia. Dar originea, cel mai probabil, e unică. Iar centrul său originar e Alexandria.

Două lucruri sunt oricum certe. Primul: complexitatea epistemică a științei elenistice nu e egalată nici de știința chineză, nici de cea indiană, semn că răspândirea științei în lumea antică e pe cât de reală, pe atât de fantomatică, lipsindu-i organicitatea – poate cu excepția Islamului, care accede direct și sistematic la sursele elenistice. Al doilea: în timp ce în Europa, Evul Mediu coincide pentru multe secole cu „perioada întunecată", în China, chiar cu fluctuații, el coincide cu o strălucitoare dezvoltare culturală și civilizațională.

Poate că și din cauza acestei osmoze marele text *Han Shu* din 130 furnizează o valoare a lui π foarte precisă:

$$\pi = 3{,}1622$$

Iar Liu Hui, cu o metodă ușor diferită de a lui Arhimede, folosind întâi un poligon cu 192 de laturi, calculează că:

$$3{,}141024 \leq \pi \leq 3{,}142704$$

Să notăm că matematicienii chinezi sunt primii care folosesc zecimalele. Iar acest mod de a-l reprezenta pe π e foarte asemănător cu cel originar. Dar Liu Hui nu se oprește aici și reușește – o spunem cu mare admirație pentru răbdarea chinezilor! – să calculeze o valoare și mai precisă, folosind un poligon cu 3 072 de laturi, anume:

$$\pi = 3{,}14159$$

În fine, în secolul V, după cum ne spune Petr Beckmann, alți doi matematicieni, Tsu Chung-Chih și fiul său, Tsu Keng-Chih, obțin valoarea:

$$3{,}1415926 \leq \pi \leq 3{,}1415927$$

a cărei precizie va fi depășită în Europa și în lume abia în secolul XVI.

La Bagdad, în secolul IX, Abū Ja'far Muhammad ibn Mūsā al-Kwārizmī, mai cunoscut ca al-Kwārizmī (780–850 circa), directorul Bayt al-Ḥikma, marea bibliotecă cunoscută în Occident drept „Casa înțelepciunii", publică o serie de scrieri în care propune diferite valori ale lui π, scrise cu cifre indiene, cele folosite azi în toată lumea:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7}; \quad \pi = \sqrt{10}; \quad \pi = \frac{62\,832}{20\,000} = 3{,}1416$$

Al-Kwārizmī e un mare matematician, poate cel mai mare din lumea islamică dintotdeauna. Dar acele valori nu sunt fructul cercetărilor lui originale, ci le-a găsit: pe primul în texte grecești, pe celelalte două în texte indiene.

Iată că încă o dată, istoria lui π ne oferă un model al întregii istorii a matematicii și, în unele privințe, a istoriei *tout court*.

Mahomed moare la Medina pe 8 iunie 632. Iar moartea sa, în loc să frâneze mișcarea popoarelor din deșert care-i urmează predicile, marchează începutul „aventurii internaționale a Islamului" care, într-un interval de timp incredibil de scurt, îi face pe arabi să creeze un imperiu întins de la strâmtoarea Gibraltar până la Ind și o civilizație la fel de, dacă nu și mai strălucitoare ca acelea bizantină, indiană, chineză, cu care are chiar o confruntare osmotică.

Nu e aici locul pentru a aminti istoria Islamului. Să spunem doar că în primele secole, imperiul e guvernat de două dinastii, întîi de cea a Omeiazilor, până în 750, cu capitala la Damasc, apoi de Abbasizi, care au capitala la Bagdad.

Mulți definesc primele două secole ale dinastiei abbaside – exact perioada în care lucrează al-Kwārizmī – drept

„renaştere islamică“, aceasta fiind, pentru musulmani, o epocă de mare dezvoltare economică, culturală şi socială la care ştiinţa participă din plin, unii cercetători privind-o ca pe un fel de repornire a ştiinţei elenistice.

Una peste alta, chiar dacă legătura dintre Islam şi lumea elenistică nu e exclusivă, ea e puternică, sistematică şi decisivă: un veritabil flux neîntrerupt de cunoştinţe absorbite şi metabolizate.

Transmiterea cunoştinţelor greceşti şi elenistice se face prin intermediul unei duble opere de traducere a clasicilor: o accelerare a traducerilor din greacă în siriană între 750 şi 850, apoi din siriană în arabă între 850 şi 950. Această operă imensă – toate scrierile în greacă sunt traduse metodic – e realizată de creştini nestorieni, în particular de membrii familiei Bukht-Yishu („Iisus a zis“).

Definirea ştiinţei ca „renaştere islamică“ e deci surprinzătoare, dar preia numai o parte a realităţii. Într-adevăr, Islamul nu se mărgineşte să continue moştenirea ştiinţei elenistice lăsate de izbelişte de către romani, ci se dovedeşte creator din punct de vedere ştiinţific. „Renaşterea islamică“ prezintă multe caractere originale, care apar pentru prima dată într-un teritoriu atât de variat încât adesea, întins cum e din Peninsula Iberică până la Ind şi Gange, nu are în comun decât folosirea limbii arabe. Aceste caractere originale se bazează fie pe elemente ale ştiinţei elenistice – mai ales aceea din prima sa fază, ştiinţa lui Euclid şi Arhimede, a lui Galen şi Claudiu Ptolemeu –, fie pe şi cu elemente din ştiinţa produsă în alte părţi ale lumii: China, India şi Persia, mai ales; elemente care sunt preluate şi topite laolaltă.

Matematicienii, astronomii şi chimiştii Islamului realizează deci o veritabilă revoluţie, nu doar o renaştere. Este una dintre revoluţiile importante, nu toate independente

şi nu întru totul liniar consecutive, care caracterizează istoria ştiinţei. Iar matematica islamică (inclusiv abordarea lui π) conţine toate elementele acestei revoluţii bazate pe contaminare.

Aici e nevoie să fim mai precişi, pentru că, aşa cum atrage atenţia Carl Boyer, în istorie există două niveluri de cultură matematică. E matematica practică, definită de unii drept „matematica abacului": apărută în Mesopotamia şi în Egipt, dar şi în India şi China, ea foloseşte de mii de ani administratorilor şi arpentorilor, meşteşugarilor şi arhitecţilor, negustorilor şi marinarilor. O cunosc şi o practică aproape toate popoarele de pe cele trei continente alăturate şi continuă să existe în Europa şi după căderea Imperiului Roman. Şi e matematica teoretică – ştiinţa matematică –, mai profundă, dar cu o existenţă mai efemeră. Aceasta apare în partea orientală a bazinului mediteranean cu Pitagora, Arhytas şi Eudoxos, se dezvoltă cu Euclid, Arhimede şi Apoloniu, şi va fi amintită – dar nu dezvoltată mai departe – în secolul IV de Pappus. Centrată pe geometrie şi pe metoda axiomatic-deductivă, această matematică nu a ajuns de fapt în Occident – *Elementele* lui Euclid sunt traduse în latină la patru secole după ce au fost traduse în arabă – şi, oricum, matematica apune în Occident după secolul IV şi va fi uitată timp de aproape o mie de ani.

Ei bine, aceste două tradiţii – cultura practică şi cultura teoretică – se întâlnesc în matematica islamică, fiecare în parte preluând intens din izvoare de pe toate cele trei continente alăturate, după cum demonstrează cele trei valori ale lui π redate de al-Kwārizmī.

Ştiinţa matematică islamică are patru componente importante:

1. o aritmetică de evidentă sorginte indiană, inclusiv principiul poziţional;

2. o algebră de sorginte mixtă (indiană, persană, greacă), dar cu profunde inovații originale;
3. o trigonometrie pe baze elenistice, pătrunsă însă și de concepții indiene și cu dezvoltări originale.
4. o geometrie de origine elenistică, la care islamicii aduc contribuții originale.

Totul e rodul incredibilei capacități a Islamului de a intra în legătură fie cu Orientul, fie cu Occidentul. Arabii, de exemplu, intră încă de la începutul „aventurii lor internaționale" în contact cu cultura indiană, prin intermediul sirienilor și al perșilor. Pentru matematică, aceste contacte au consecințe cu adevărat profunde. Arabii află în scurt timp că indienii au un sistem de numerație foarte eficient, cel pozițional, bazat pe numai nouă cifre (plus una, zero, care încă nu e considerat chiar număr), sistem foarte eficient pentru socotit, deosebit de util negustorilor.

Astfel, chiar dacă resping numerele negative, deja folosite de indieni, învață tehnici matematice foarte avansate elaborate între Ind și Gange, dar încă necunoscute în Occident. Prima referire la noile cifre indiene și la sistemul pozițional zecimal e înregistrată pe la 662, în scrierile episcopului nestorian Severus Sebokt. După închiderea Academiei lui Platon, decretată în 529 de împăratul bizantin Iustinian, mulți intelectuali părăsesc Atena, fugind de persecuții, și emigrează în Siria și în Persia. Sunt intelectuali de mare valoare, dar cărora nu le lipsește o doză de condescendență față de cultura din provincii, convinși fiind că se află în posesia unicei adevărate culturi. După cum observă Carl Boyer, Severus Sebokt reacționează față de acest dispreț pentru celelalte culturi amintindu-le vorbitorilor de limbă greacă că „există și alte popoare cu oarece cunoștințe științifice". Mai ales indienii, care au realizat „subtile descoperiri astronomice"

și au pus la punct „metode de calcul prețioase care depășesc orice descriere [...]. Vă spun doar că aceste calcule se fac cu numai nouă semne“.

Așadar, matematica indiană e cunoscută și apreciată în Orientul Mijlociu. Dar abia în 766 ajunge la Bagdad o copie a uneia dintre versiunile *Siddhāntei*, probabil *Brāhmasphuta Siddhānta*, în care sunt multe referiri la sistemul de numerație și la trigonometrie. Opera e studiată intens, iar în 775 e tradusă în arabă: la dispoziția tuturor, chiar și a celor care nu cunosc hindu.

Trebuie subliniat că matematica și, mai general, știința hindusă ajung în noua capitală a imperiului, Bagdad, înainte de știința și matematica grecilor. În 780 e tradus din greacă în arabă și *Tetrabiblos*, opera astrologică a lui Ptolemeu, și imediat după aceea se traduc *Elementele* lui Euclid și *Almagesta* lui Ptolemeu.

Astfel, la finele secolului VIII, musulmanii încep să studieze practic în același timp culturile științifice indiană și elenistică, să le metabolizeze și să le topească într-un tot pe care îl și înnoiesc. Pe bună dreptate scrie Carl Boyer că „miracolul arab“ nu constă atât în viteza cu care ia ființă imperiul, ci în promptitudinea cu care popoarele din deșert absorb cunoștințele vecinilor.

De fapt, nu despre „miracol arab“ ar trebui să vorbim, cât despre „miracol islamic“, pentru că în imperiu trăiesc mai multe populații și grupuri (chiar de religii diferite), unele lângă altele în Bagdad, contaminându-se reciproc. Matematica islamică e un exemplu luminos de asemenea contagiune originală și creatoare, generatoare de noi cunoștințe. Traducând din sanscrită și din greacă (direct sau prin intermediul sirienei), islamicii realizează o operațiune cu adevărat inedită: combină cunoștințele geometrice occidentale cu acelea orientale de algebră și aritmetică.

Geometria islamică e în întregime de sorginte elenistică, bazată mai ales pe traducerile din Euclid, Arhimede şi Heron. În schimb, trigonometria e de sorginte indiană şi, la fel ca aceea hindusă, e prezentată aritmetic, nu geometric. Matematicienii islamici o îmbogăţesc totuşi, introducând, de exemplu, conceptul de tangentă pe lângă cele de cosinus şi sinus propuse de indieni şi tinzând să organizeze trigonometria sistematic. Astfel, la începutul secolului X, ei au definit deja toate cele şase funcţii trigonometrice clasice (sinus, cosinus, tangentă, cotangentă, secantă, cosecantă), au determinat relaţiile dintre ele şi aplică acest corpus nou de cunoştinţe în diferite sectoare ale ştiinţelor naturii, începând cu astronomia.

Între altele, trigonometria va juca un rol de prim-plan în viitorul lui π.

Dar contribuţia arabă cea mai importantă în matematică se înregistrează probabil în algebră. Primul mare matematician al Islamului e al-Kwārizmī. S-a născut probabil în Kharazm (Uzbekistanul de azi), apoi a studiat şi trăit la Bagdad, unde califul abbasid al-Ma'mūn îl numise la conducerea marii sale biblioteci, Bayt al-Ḥikma. Bagdadul Abbasizilor e un oraş creativ care seamănă mult cu Alexandria Ptolemeilor. Iar biblioteca, cu cele 500 000 de volume ale ei, centru de lectură şi de cercetare ştiinţifică, e un aspect semnificativ al acestei extraordinare asemănări.

Interesele ştiinţifice ale lui al-Kwārizmī sunt multiple, dar matematica ocupă mereu un rol central, el însuşi având un rol central în istoria matematicii, nu doar islamice – de la titlul operei sale celei mai importante, *Al-jabr wa'l muqābalah* se trage termenul modern de algebră (care înseamnă „a restabili“, adică, în context matematic, „a restabili echilibrul unei ecuaţii“).

În această lucrare, al-Kwārizmī nu folosește simboluri și nici nu atacă problemele grele ale algebrei nedeterminate*, astfel că ceea ce prezintă el e mai puțin avansat decât algebra elenistică a lui Diofant și decât algebra indiană a lui Brahmagupta. Totuși *Al-jabr* e, dintre textele vechi, cel mai apropiat de un manual de algebră modern: pe de o parte, pentru că prin „algebră“ se înțelege studiul calculului și căutarea modului optim de rezolvare a problemelor și ecuațiilor, pe de altă parte, pentru că prezintă sistematic problemele algebrei determinate, mai ales a acelora care se pot rezolva cu ecuații de gradul al doilea. Opera lui al-Kwārizmī e deci una importantă de didactica algebrei – unii spun chiar că această carte e pentru algebră ceea ce sunt pentru geometrie *Elementele* lui Euclid, cea mai bună carte elementară disponibilă până în vremurile moderne, al-Kwārizmī putând fi deci considerat „părintele algebrei“.

Lui al-Kwārizmī i se atribuie peste douăsprezece cărți de matematică și astronomie, cele mai multe referindu-se explicit la cunoștințele produse de știința indiană, fără pretenții de originalitate. Numai o eroare de transmitere a făcut ca Europa să-i atribuie multă vreme ceea ce el nu a pretins niciodată.

Lumea islamică a avut însă și alți matematicieni. În secolul IX, de exemplu, lucrează Thābit ibn-Qurra. Ca și al-Kwārizmī sau Pappus, el e mai degrabă un comentator, nu un matematician original. Mare traducător, rescrie în arabă operele lui Euclid, Arhimede, Apoloniu și Ptolemeu. Nelimitându-se să cultive matematica, produce și cunoștințe

* Termenii „algebră determinată“ și „algebră nedeterminată“ erau folosiți pentru a denumi studiul general al ecuațiilor (date de funcții care, pentru o valoare determinată a argumentului, iau o valoare bine determinată), respectiv al funcțiilor, al seriilor etc. (*N. t.*)

originale – despre numerele prietene*, de pildă. Inovează şi în astronomie, adăugând o a noua sferă celor opt ale sistemului aristotelico-ptolemeic. Dar pe Diofant şi pe Pappus Thābit nu i-a tradus. Primul devine cunoscut arabilor în secolul X prin traducerea lui Abu'l-Wafā, şi e studiat temeinic de al-Karkhī.

Un alt matematician original e Omar al-Khayyām, cunoscut în Europa mai ales ca poet, dar cu contribuţii importante şi la analiza algebrică. Printre altele, a scris *Algebra* în care a studiat ecuaţiile de gradul al treilea, propunând metode generale de rezolvare, cu caracter geometric. Descoperă – de altfel, în acelaşi timp cu matematicieni chinezi, poate ca urmare a unei reciproce influenţe – regulile după care se găsesc puterile unui binom de ordin superior lui trei.

Dar dincolo de individualităţi, ne interesează ansamblul cunoaşterii matematice din Islam.

E drept că mulţi istorici, ca Charles Singer, susţin că al-Kwārizmī nu e deloc un matematician original şi că, oricum, nivelul la care ajunge matematica islamică, deşi ridicat, e inferior celui la care au ajuns geometria elenistică şi algebra indiană. Pe de altă parte, islamicii ar fi foarte pricepuţi la aplicaţiile matematicii în fizică.

Dar dacă această teză e adevărată, atunci sunt adevărate încă două. Matematicienii islamici sunt foarte pricepuţi la combinarea geometriei elenistice cu algebra indiană şi contribuie cu un aport original la dezvoltarea matematicii, permiţând şi Europei s-o descopere începând cu secolul XIII.

În sprijinul acestei teze, să luăm cazul lui Jamshīd al-Kashī, autor al *al-Risāla al-muhītiyya* (1424), un tratat

---

* Perechi de numere care sunt, fiecare, suma divizorilor celuilalt (inclusiv 1). De exemplu 220 şi 284. (*N. t.*)

despre cerc. Născut în Kashan (Iranul de azi), al-Kashī e un matematician original, mai ales în trigonometrie: e cunoscută și azi „teorema lui al-Kashī“*. În plus, se spune despre el că a introdus în Occident fracțiile zecimale. Ei bine, al-Kashī aplică metoda exhaustiei a lui Arhimede și calculează valoarea lui π (a lui 2π de fapt) până la a șaisprezecea zecimală (și a noua cifră a sistemului sexagesimal). Nu e original în metodă, dar după nouă sute de ani el depășește (cu mult) precizia obținută de Tsu Chung-Chih, și de fiul să, Tsu Keng-Chih, care se opriseră la a șaptea cifră zecimală.

Tabelul 1
Valoarea lui π la diferite civilizații antice
(aproximată la a patra zecimală)

	Ani față de prezent	Valoarea lui π
Mesopotamia	– 4000	3,125
Egipt	– 4000	3,1605
Palestina	– 2500	3
Lumea elenistică (Arhimede)	– 2300	3,1412
China	– 1900	3,1416
India	– 1600	3,1416
Lumea islamică	– 600	3,1415
Valoarea de azi	0	3,1415

* E vorba despre teorema cosinusurilor sau „teorema lui Pitagora generalizată“ (*N. t.*)

6. Europa descoperă numărul π

LEONARDO DIN PISA, ZIS FIBONACCI

Arhimede s-a născut şi a trăit în Sicilia, dar aparţine culturii elenistice, nu poate fi considerat un exponent al celei europene. Europa deci, aşa cum o înţelegem noi azi, e ultimul dintre continentele alăturate care descoperă numărul π. Motivul e cel deja amintit. După căderea Cartaginei, în 146 î.C., Mediterana devine un „lac roman", dar cum nici Roma republicană, nici cea imperială nu sunt interesate de ştiinţă, în lumea romană – cu excepţia parţială a Alexandriei şi a altor regiuni aflate încă sub influenţa culturii elenistice – nu se mai produc cunoştinţe ştiinţifice semnificative. Matematica e şi ea ignorată sau uitată, iar odată cu ea numărul π.

Primul european capabil să producă noi cunoştinţe matematice e Leonardo din Pisa, zis Fibonacci, care publică în 1202, la Pisa, *Liber abaci*, făcând cunoscute în Italia sistemul de numeraţie poziţional al indienilor, secţiunea de aur şi algebra mai adusă la zi.

De fapt, unii ar putea obiecta că Fibonacci nu e chiar un reprezentant al culturii europene, format fiind şi devenind un matematician creativ în Africa de Nord, unde făcea negoţ tatăl său. E totuşi sigur că, după ce împlineşte 25 de ani,

Leonardo se întoarce la Pisa şi nu se limitează la a transmite în Italia şi în Europa cunoştinţele dobândite în lumea islamică, ci produce el însuşi noi cunoştinţe matematice. În mare parte, ele sunt cuprinse în *Liber abaci*.

Când, în 1220, Fibonacci îşi publică a doua carte, *Practica geometriae*, Europa descoperă, în sfârşit, numărul π. Contribuţia sa originală în legătură cu π e o nouă metodă de a-l calcula, foarte similară celei a lui Arhimede, pe care Fibonacci o are la degetul mic: foloseşte un poligon cu 96 de laturi, dar, în plus, acum poate utiliza numerele zecimale pe care Arhimede nu le cunoştea.

De fapt, Fibonacci e mai puţin riguros şi precis decât Arhimede, dar obţine o serie de valori din care rezultă media:

$$\pi = 3{,}141818$$

Valoare mai apropiată de cea actuală (pe care o considerăm adevărată) decât a lui Arhimede. Frumoasă realizare, chiar dacă un pic norocoasă, pentru un început...

E drept că Gerbert d'Aurillac, viitorul papă Silvestru II, studiase matematica arabă în Spania chiar înainte de anul 1000 şi aflase despre π, cunoscându-i valoarea calculată de Arhimede (3,1412), dar d'Aurillac nu era un creator, nu a adus nimic nou chestiunii lui π, nici matematicii, şi nici nu a fost în stare să împărtăşească şi altora cunoştinţele sale. Poate că în vremea lui Europa nu era încă pregătită, ca două sute de ani mai târziu, pe vremea lui Fibonacci, când mase din ce în ce mai mari de oameni se mutau la oraş, apăreau industrii noi şi noi clase sociale care începeau să aibă nevoie de înnoire. Fibonacci, spre deosebire de d'Aurillac, e omul potrivit la locul potrivit (Pisa e un oraş portuar foarte însufleţit) şi la momentul potrivit (secolul XIII e definit drept „prima renaştere europeană").

În secolul XIII, Europa „descoperă" ştiinţa: prin Fibonacci, dar şi printr-o nesfârşită serie de clasici elenistici şi

islamici traduşi mai ales la Toledo şi Palermo. O descoperă, în fine, arată că o apreciază şi că posedă un însemnat potenţial creator. Am reconstituit acest parcurs în *Ştiinţa şi Europa. De la origini la secolul XIII*. Aici mai amintim numai că în 1346, la Paris, italianul Domenico di Chivasso scrie şi el o *Practica geometriae*, în care arată nu doar că şi el cunoaşte valoarea lui π calculată de Arhimede, dar şi că ştie foarte bine că e vorba despre o aproximaţie care, ca atare, poate fi îmbunătăţită.

Din păcate, marea criză economică şi sanitară din secolul XIV, cu o epidemie de ciumă la jumătatea lui care ucide o treime din populaţia continentului, sufocă din faşă acea tensiune creatoare şi marchează o nouă perioadă de stagnare. Dezvoltarea se reia odată cu Renaşterea, în primii ani ai secolului XV, în atelierele meşteşugarilor şi inginerilor florentini (vezi cartea mea *Ştiinţa şi Europa. Renaşterea*).

RENAŞTEREA

În secolul XV, Europa redescoperă ştiinţa, pornind de la atelierele artiştilor şi inginerilor, ba chiar ale artiştilor-ingineri florentini. Pionierii sunt Filippo Brunelleschi, Masaccio, Donatello, personaje extraordinare care nu lipsesc din nici un manual de artă. Se ocupă cu arhitectura, cu sculptura, cu pictura. Au în comun oraşul în care lucrează, Florenţa, şi descoperirea perspectivei. Adică a geometriei şi, mai general, a matematicii.

La începutul acestui secol, mulţi artişti, nu doar la Florenţa, încearcă o mare tensiune naturalistă. Problema lor e cum să reprezinte realitatea. Găsesc răspunsul în operele marilor matematicieni elenişti – Euclid, Arhimede, Heron,

Ptolemeu – pe care îi redescoperă umaniștii, traducându-i și reluându-i.

Primul mare teoretician al perspectivei și, din acest motiv, „punct de pornire al științei renascentiste“, susțin Lucio Russo și Emanuela Santoni în *Ingegni minuti* (2010), o istorie completă a științei italiene, e Leon Battista Alberti, care în 1435 scrie la Florența celebra *De pictura*, opera care consacră noua alianță dintre matematică și artă.

De-a lungul întregului secol XV, Italia și, mai ales, Florența, e capitala „științei vizuale“ a Renașterii, a cărei dezvoltare e stimulată de un nou val de traduceri din clasicii elenistici, de data asta direct din limba greacă. Protagoniștii acestei faze sunt artiști matematicieni ca Piero della Francesca și matematicieni ca Luca Pacioli, dar sunt implicați și mulți alți artiști, inclusiv cei trei mari cărora Giorgio Vasari le atribuie cucerirea perfecțiunii absolute în reprezentarea realității: Leonardo da Vinci, Raffaello Sanzio și Michelangelo Buonarroti.

Cu siguranță cel mai eclectic dintre cei trei e Leonardo, care, în operele sale, se referă explicit de cel puțin două ori la metodele pentru cuadratura cercului. O dată e vorba pur și simplu de o citare din clasicii greci, dar a doua oară avem o tentativă originală, dovadă că în Renaștere e aproape imposibil să separi arta de știință. Și, cu această ocazie, Leonardo se întâlnește de mai multe ori cu numărul π.

Între sfârșitul secolului XV și începutul secolului XVI, știința vizuală se răspândește în toată Europa, creând premisa acelei „revoluții“ din secolul XVII ale cărei personaje cele mai emblematice vor fi Galilei și Newton. Perioadă în care se schimbă dramatic și povestea lui π. Într-adevăr, dacă între secolul XV și prima parte a secolului XVI matematicienii europeni încep să se familiarizeze cu dezbaterea despre

valoarea şi natura lui π, la sfârşitul secolului XVI ei găsesc o nouă metodă originală pentru a-l calcula. E un semnal că matematicienii şi specialiştii în filozofia naturală din Europa încep să privească dincolo de limitele, oricât de extraordinare, ale ştiinţei elenistice şi să producă în mod sistematic cunoştinţe noi şi profunde.

E util să observăm mai îndeaproape aceste două faze ale matematicii renascentiste.

De fapt, în secolele XV şi XVI se schimbă o lume. Asediat de turci, Constantinopolul cade în 1453 – aşa ia sfârşit Imperiul Roman de Răsărit, la o mie de ani de la căderea Imperiului Roman de Apus. Doi ani mai târziu, Johannes Gutenberg pune la punct un sistem de tipărire cu caractere mobile, premisă nu doar pentru o nouă industrie (aceea a cărţii), ci şi pentru noi posibilităţi de comunicare şi de dezvoltare a culturii, inclusiv a culturii ştiinţifice şi a matematicii. Tiparul e primul mijloc de comunicare în masă.

În acela şi timp, folosindu-şi navele, europenii frecventează din ce în ce mai asiduu America şi India, China şi arhipelagurile răspândite între Oceanul Indian şi cel Pacific. Lumea se micşorează, cel puţin pentru europeni. Treptat, se modifică echilibrele economice şi culturale din interiorul continentului, în defavoarea naţiunilor mediteraneene şi în favoarea celor nordice.

Abia redescoperită, ştiinţa e implicată puternic în aceste schimbări extraordinare. Şi cum ştiinţa renascentistă e vizuală, centrată pe optica geometrică, domeniile în care se întâlnesc artiştii cu matematicienii sunt optica şi geometria.

Cel care exprimă cel mai bine această întâlnire fecundă dintre matematică şi pictură e probabil Piero di Benedetto de' Franceschi, mai cunoscut ca Piero della Francesca, un mare pictor şi, după Morris Kline, „cel mai bun geometru

al vremii“. E, într-adevăr, un mare artist şi un teoretician al matematicii, dimensiuni care se armonizează perfect, pentru că Piero della Francesca vede perspectiva ca pe o veritabilă ştiinţă a picturii, cercetările sale orientându-se către corectarea şi extinderea, cu ajutorul matematicii, a cunoştinţelor empirice din artele figurative. Un pictor bun, susţine el, trebuie neapărat să fie şi un bun matematician. Iar el, pe lângă tablourile care-l plasează între cei mai importanţi pictori (inclusiv în ochii modernilor), are şi preocupări de cercetare în matematică.

Scrierile sale ştiinţifice principale sunt *De quinque corporibus regularibus* (*Despre cele cinci corpuri regulate*), dedicată Ducelui de Montefeltro, în care studiază geometria euclidiană şi în special cele cinci poliedre regulate, şi *De prospectiva pingendi* (*Despre perspectivă în pictură*), opera sa cea mai faimoasă, scrisă la maturitate, în care aprofundează teoria perspectivei prezentându-i aproape exhaustiv principiile geometrice. Într-o a treia scriere, *Tratatul despre abac*, reia temele şi sistemul de numeraţie poziţional cu cifre indo-arabe al lui Fibonacci şi se aventurează într-o discuţie despre ecuaţiile de gradul al cincilea.

Piero della Francesca nu e o excepţie în Italia renascentistă. Găsim în vremea aceea şi alţi umanişti care sunt şi buni matematicieni. Un exemplu important e algebristul Luca Pacioli, elev al lui Piero della Francesca – născut, ca şi Pacioli, la Borgo San Sepocro.

În 1494, părintele franciscan Luca Pacioli trimite la tipar opera sa principală, *Compendiu de aritmetică, geometrie, proporţii şi proporţionalitate*, în care discută patru tehnici matematice (contabilitate, aritmetică, geometrie şi algebră), propunând un compendiu al cunoţinţelor predate în universităţi şi ateliere. Revenirea ştiinţei ecuaţiilor în Europa

fusese pregătită de traducerea în italiană, cu zece ani în urmă, a *Algebrei* lui al-Khwārizmī. Dar cartea lui Pacioli poate revendica mai multe priorități: e primul tratat de algebră tipărit vreodată; e cel mai important tratat de algebră din secolul XV și cartea de algebră cea mai cunoscută la începutul veacului XVI. În ea, în afară de geometria lui Euclid și de aritmetica lui Arhimede, Pacioli reia lucrările lui Fibonacci, inclusiv pe acelea despre „partida dublă“, aducându-le la zi conform schimbărilor survenite în ultimele trei veacuri.

Părintele Luca Pacioli „citește“, adică predă, în același Studium din Bologna cu Scipion Dal Ferro, ambii fiind considerați fondatorii noii algebre care se impune în secolul XVI.

Florența și Italia sunt centrul renașterii științei în Europa. Totuși, scrie Umberto Bottazzini în primul volum al *Istoriei științei moderne și contemporane*, ediție îngrijită de Paolo Rossi, „cultura și tehnicile abaciștilor italieni se răspândesc în orașele Europei, mai ales ale Germaniei, călătorind odată cu negușătorii“.

Școala de *Rechenmeister* (versiunea germană a „școlii abacului“) joacă aici un rol determinant. În secolul XV, Regiomontanus, pe numele său adevărat Johannes Müller e cu siguranță figura germană cea mai reprezentativă pentru matematică, dar și pentru astronomie și umanism. Îl redescoperă pe Diofant, dar se vădește a fi și un bun algebrist, care știe să folosească metode geometrice pentru rezolvarea unor probleme de algebră. În plus, studiază și răspândește trigonometria dezvoltată de matematicienii islamici. În *De triangulis omnimodis* (*Despre toate tipurile de triunghiuri*, 1464) și în *Tabulae directionum* (*Tabele trigonometrice*), publicate postum, în 1490, se ocupă sistematic de trigonometrie și contribuie astfel la formarea unei serii de tineri matematicieni, printre care Nikolaj Kopernik, cunoscut drept Copernic,

care le foloseşte consistent în lucrările lui de astronomie. În 1542, Copernic publică *De lateribus et angulis triangulorum* (*Despre laturile şi unghiurile triunghiurilor*), rodul studiilor sale de trigonometrie, pe care după un an o înglobează în mai celebra sa carte *De revolutionibus orbium coelestium* (*Despre revoluţiile corpurilor cereşti*).

Între timp, chiar la jumătatea secolului XV, cardinalul Nicolaus Cusanus pretinde că a reuşit cuadratura cercului, găsind pentru π valoarea 3,1423. Regiomontanus demontează afirmaţia arătând că metoda folosită nu e corectă.

Trigonometria e oarecum emblema matematicii renascentiste. Adusă în Europa de Fibonacci, începe să fie utilizată în scopuri practice (cadastru) abia la 1450. Interesul pentru trigonometrie sporeşte în acest secol datorită noilor probleme puse de navigaţie, de elaborarea calendarelor şi astronomie. În afară de Regiomontanus, printre primii care-o cultivă se numără austriacul Georg von Peuerbach, unul dintre cei dintâi care, în acea perioadă, se interesează activ de π. Nu produce nimic nou în legătură cu el, dar arată că-i cunoaşte în detaliu povestea. În lucrările lui, citează nu doar valoarea (22/7) şi metoda lui Arhimede, ci şi una dintre valorile obţinute de indieni (√10) şi pe aceea calculată de Ptolemeu (377/120). Un alt algebrist eminent din Germania e Johannes Widman, în timp ce geometrul Johann Werner reia studiul conicelor, curbele cu care lucrase Apoloniu.

Sunt matematicieni şi în Franţa, mai ales algebrişti, Nicolas Chuquet din Lyon, de exemplu. Cartea sa din 1484, *Triparty en la science des nombres* (*Tratat în trei părţi despre ştiinţa numerelor*) nu conţine mari noutăţi, totuşi Carl Boyer o consideră fundamentală pentru matematica europeană, la fel de importantă ca a lui Fibonacci, pentru că reia şi discută întreaga matematică cunoscută: în prima parte sunt prezentate

operațiile aritmetice raționale și sistemul de numerație pozițional indo-arab; partea a doua tratează soluții ale unor ecuații; în partea a treia dezvoltă algebra.

Dacă secolul XV e cel al reluării studiilor matematice, secolul XVI e cel al definitivei lor explozii. Acum se răspândește predarea științei numerelor în aproape toate universitățile europene, cuprinzând și astronomia și astrologia. La Oxford, Henry Savile, decan al Merton College, creează catedra de geometrie și astronomie; chiar înainte, la Padova, Ignazio Danti revendică pentru matematică statutul de știință și face loc printre cursurile sale geografiei, arhitecturii și mecanicii.

Dar studiile matematice înfloresc și – sau poate mai ales – în afara universităților: la Paris, pe lângă Collège Royal, fondat în 1530 de Francisc I; la Londra, în urma donației unui negustor, Thomas Gresham, ia ființă un cerc privat, Gresham College, unde se predă matematică pentru scopuri practice; în timp ce la Roma, știința numerelor se studiază și se predă la Collegio Romano, acela al iezuiților.

Una peste alta, profesiunea de matematician începe să se răspândească. Dar în povestea lui π, în prima parte a secolului XVI, personajul principal e un artist: Albrecht Dürer, gravor extraordinar și autorul unor tablouri naturaliste de mare frumusețe. Dürer e primul artist german care se ocupă serios de perspectivă și de proporțiile corpului uman. Prima sa publicație, apărută în 1525, la douăzeci de ani după întâlnirea cu Luca Pacioli, se ocupă de *Instrucțiuni despre felul de a măsura planele și volumele cu rigla și compasul* și e una dintre primele cărți de matematică publicate în Germania. Conține, printre altele, construcția a numeroase tipuri de curbe, printre care spirala lui Arhimede. Și celelalte două cărți ale sale – *Instrucțiuni despre arta de a fortifica cetăți, castele și orașe,*

din 1527, şi *Patru cărţi despre proporţiile umane*, 1528 – au conţinut tehnic şi matematic.

Albrecht Dürer se întâlneşte de mai multe ori cu π, la fel ca Luca Pacioli şi Leonardo da Vinci, şi din acelaşi motiv: toţi studiază felul în care poate fi înscris un poligon într-un cerc, soluţia fiindu-le necesară din motive cât se poate de practice – construcţia celor mai bune fortificaţii pentru apărarea militară a unui oraş. Ciudat lucru, Dürer foloseşte pentru π valoarea babilonienilor, 3+1/8 = 3,125.

Sigur că Dürer nu e singurul german care se ocupă la acea vreme de matematică. În 1503, de exemplu, Gregor Reisch publică *Margarita philosophica*. Foarte cunoscute sunt şi operele lui Adam Riese despre *Rechenkunst*, arta de a calcula cu cifre arabe. Cartea conţine şi notaţia simbolică pentru puteri. O mare influenţă culturală are Michael Stifel, prieten şi susţinător al lui Martin Luther, care scrie şi publică la Nürnberg, în 1544, cu o prefaţă a lui Melanchthon, *Arithmetica integra*, operă în care nu găsim noutăţi importante faţă de ceea ce se ştia în Italia, dar în care, pentru prima oară, sunt folosite sistematic semnele + şi – pentru numerele relative*. Stifel e interesat în mod deosebit de legăturile dintre progresiile algebrice şi geometrice, pe de o parte, şi algebra literală (adică de utilizarea simbolurilor literale în calcule). În plus, atacă tema de ordin teoretic a realităţii numerelor iraţionale, temă care include numărul π, despre care se bănuieşte de mult că ar fi iraţional.

„Aşa cum un număr infinit nu e un număr, la fel un număr iraţional nu e un număr veritabil, ci stă pitit într-un fel de nor de infinit“, susţine Stifel, reluând ideea lui Pitagora conform căreia numerele „adevărate“ sunt numai cele

* Numere întregi (*N. t.*)

întregi sau fracţionare. Pentru Stifel, π e un „non-număr“ care trăieşte prin norii înşelători ai infinitului. Sigur că, pentru el, şi numerele negative sunt reprezentări ale absurdului. Una peste alta, în secolul XVI acesta e sentimentul (doar un sentiment) cel mai răspândit despre natura lui π.

Poziţia aceasta are meritul de a stimula reluarea discuţiei despre natura anumitor numere, discuţie la care participă şi Girolamo Cardano. Matematicianul din Pavia consideră numerele negative drept nişte simboluri care apar ca soluţii ale ecuaţiilor, dar lipsite de vreo semnificaţie reală. Abia pe la sfârşitul secolului XVI, Thomas Harriot va începe să acrediteze numerele negative ca fiind „adevărate“. Asta după ce, înaintea lui, Rafael Bombelli le dăduse o definiţie clară.

Bombelli lucrează în Italia, unde algebra secolului XVI obţine rezultatele cele mai semnificative, în parte pentru că drumul fusese deschis de clasicii redescoperiţi de Federico Commandino din Urbino şi de Francesco Maurolico din Messina, în parte pentru că se continuă şi cercetările originale, cu noutăţi semnificative faţă de algebra lui al-Kwārizmī. Marele matematician islamic propunea două moduri de a trata algebra: simbolic şi geometric. Matematicienii europeni şi mai ales cei italieni din secolele XV şi XVI încep să unească cele două limbaje.

Într-adevăr, în secolul XVI cercetările şi studiile originale de algebră se intensifică şi apar noi publicaţii importante. În 1521, Francesco Ghaligai tipăreşte la Florenţa *Summa de aritmetica*, urmată, după doi ani, de o nouă ediţie a *Summei* lui Luca Pacioli. Algebra italiană îi datorează mult lui Scipion Dal Ferro, care predă la Bologna concomitent cu Pacioli şi rezolvă acele ecuaţii de gradul trei pe care Pacioli le credea imposibil de rezolvat. Dar Dal Ferro nu lasă nimic scris. În schimb, Niccolò Tartaglia, cunoscut şi ca Niccolò Fontana,

care ajunge la aceleaşi concluzii în 1535, îi recunoaşte întâietatea.

Tartaglia îşi construieşte faima pe baza cunoaşterii soluţiei ecuaţiei de gradul al treilea (pe care o ţine în mare secret). Dar în 1545, la Nürnberg, Girolamo Cardano îşi publică *Ars Magna*, carte de mare succes şi pentru că prezintă cele mai noi rezultate teoretice ale algebriştilor italieni. Cardano, un medic foarte cunoscut, expert în magie naturală şi astrologie, e şi un matematician priceput care-l predă pe Euclid la Milano. Nu e deci de mirare că despre *Ars Magna* Umberto Botazzini crede că „marchează o cotitură în istoria matematicii, depăşind odată pentru totdeauna algebra medievală şi dând startul unei noi epoci". Cardano face cunoscut secretul soluţiei ecuaţiei de gradul al treilea al lui Tartaglia, cu care şi intră în polemică – una sortită să devină celebră. Jucător împătimit de zaruri şi spadasin abil, Cardano e cunoscut în Europa nu numai pentru geniul său matematic, ci şi pentru moravurile sale, nu tocmai ale unui sfânt: trăieşte din plin şi nu o ascunde. În cartea *Libro de ludo alae* (*Despre jocul de zaruri*), publicată postum în 1663, aplică în felul său matematica, dând sfaturi despre cum să trişezi, activitate pe care o practică el însuşi – nu din pasiune, ci ca să facă bani. Nonconformismul îl îndeamnă adesea să exploreze zone periculoase. În 1570, de exemplu, face horoscopul lui Isus şi drept răsplată merge la închisoare, acuzat de erezie. Dar omul e genial şi descurcăreţ. Până la urmă, ajunge astrologul papei.

Astfel se consumă, fără a se epuiza complet, în dueluri epice, prima mare perioadă a algebrei italiene. Iar în 1572, Rafael Bombelli publică *Opera sull'algebra* – pe urmele lui Scipion Dal Ferro, dar stimulat şi de ce a învăţat din proaspăt regăsitul manual al lui Diofant, *Aritmetica*; lucrarea se

impune pentru mai mult de un secol drept principalul manual european de algebră superioară. În ea, Bombelli continuă reflecţia asupra ecuaţiilor de ordin superior lui doi şi introduce noile numere: cele imaginare.

Ce sunt? Să luăm un exemplu. Să considerăm numărul negativ –9 şi să încercăm să-i extragem radicalul: $\sqrt{-9}$. Operaţia nu are soluţie, pentru că nu cunoaştem nici un umăr care înmulţit cu el însuşi să dea un număr negativ. Pot totuşi considera că:

$$-9 = (-1)9$$

şi deci pot scrie radicalul meu ca:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9(-1)} = \sqrt{9}\sqrt{-1} = 3\sqrt{-1}$$

Numărul $\sqrt{-1}$ nu există în lumea reală. Îl pot totuşi defini ca număr imaginar. Azi îl notăm cu litera *i* şi scriem

$$i = \sqrt{-1},$$

astfel că

$$\sqrt{-9} = 3i$$

Bombelli demonstrează că nu e posibil să găsim o regulă generală pentru rezolvarea ecuaţiilor cubice (de gradul al treilea) fără a recurge la aceste numere ciudate, diferite de numerele reale, pentru că nu sunt nici pozitive, nici negative: ele sunt, întocmai, imaginare. Îşi dă seama că numerele imaginare pot părea abstracţiuni pure, artefacte matematice. Dar, cu remarcabil pragmatism, observă că ele apar frecvent şi adoptă o atitudine „modernă", are grijă să evite polemicile despre „natura ultimă" a acestor numere

și se mărginește să expună direct regulile de calcul care le guvernează.

Bombelli triumfă acolo unde Cardano a încercat și a eșuat. Cardano însă reacționează, obiectându-i lui Bombelli că îl distruge complet pe Euclid, deoarece numerele imaginare nu se pot interpreta nicicum ca mărimi geometrice.

Două noutăți, așadar, spre sfârșitul secolului XVI. Prima: matematicienii europeni au produs noi cunoștințe, depășind limitele trasate de elenistici și islamici, propunând și o extindere ulterioară a sistemului numerelor; la începutul secolului, zero e în fine recunoscut ca membru cu drepturi depline al familiei numerelor, familie în care, la sfârșitul veacului, intră numerele negative, apoi și cele imaginare. Acum, matematicienii europeni cunosc și lucrează cu mai multe numere decât orice alt coleg din trecut sau din prezent care locuiește în alt continent. O noutate la fel de semnificativă în algebră e introducerea simbolurilor. Dacă înainte de secolul XVI doar Diofant încercase să compactifice raționamentul algebric, eficientizându-l prin introducerea simbolurilor, acum asistăm la răspândirea lentă, dar constantă a simbolurilor: o revoluție ale cărei efecte în comunicarea matematicii se vor simți foarte curând. La fel cum extrem de importantă e introducerea numerelor zecimale pe care flamandul Simon Stevin le folosește în cartea sa *La Disme* (*Zecimea*), publicată în 1585.

Dar matematica europeană din secolul XVI nu se reduce la algebră. Am menționat deja trigonometria, redescoperită în secolul anterior și aplicată în studiile agronomice și astronomice. Domeniu în care se distinge Georg Joachim von Lauchen, cunoscut și ca Rheticus.

În fine, o altă mare noutate e introdusă în 1594 de John Napier: logaritmul. Logaritmul unui număr a e un alt număr

x, pe care azi îl numim exponent, la care trebuie să ridicăm un al treilea număr, b, numit bază, ca să-l obținem pe a. Să dăm un exemplu: logaritmul lui 8 e 3 dacă baza e 2.

$$log_2 8 = 3$$

pentru că

$$2^3 = 8$$

În același fel, 3 e logaritmul în baza 10 al lui 1000:

$$log_{10} 1000 = 3$$

pentru că

$$10^3 = 1000$$

Ne-am oprit asupra logaritmilor pentru că foarte curând ei vor intra în povestea lui π. Să ne întoarcem însă la istoria generală a matematicii din secolul XVI, spre sfârșitul căruia se distinge iezuitul german Christoph Clau, cunoscut în Italia drept Clavio, principalul autor al reformei calendarului. Datorită lui, mai ales, Compania lui Isus capătă un rol de prim plan în comunitatea matematică. Sunt apoi „matematicienii umaniști", Federico Commandino și Francesco Maurolico, este iezuitul napoletan Luca Valerio, care dezvoltă tehnicile lui Arhimede pentru construcția centrelor de masă ale corpurilor dragi geometriei grecești, temă pe care, la finele veacului, o atacă și tânărul Galilei, pornind tot de la Arhimede. Care Arhimede, prea puțin citit în secolele XIII–XV, chiar dacă a fost deja tradus în latină de Wilhelm de Moerbeke și retradus din greacă de cardinalul Giacomo di Cremona în 1450, tot nu e foarte cunoscut nici în Renaștere, cel puțin nu în profunzime, poate pentru că e prea dificil. După

Morris Kline, savanţii renascentişti preiau doar parţial perspectiva, valorile şi obiectivele operelor greceşti, astfel încât chiar şi cei mai buni au dificultăţi în a-l înţelege pe Arhimede. Dar acei puţini care-l citesc şi înţeleg deschid un drum nou, necunoscut până atunci, în istoria ştiinţei europene.

Chiar dacă mulţi cred că Renaşterea n-a prea produs rezultate spectaculoase în matematică, cel puţin două merite ale acestei perioade sunt siliţi să recunoască: restabileşte, la fel ca în vremea Alexandriei, legături strânse între ştiinţa numerelor, ştiinţele naturale (astronomia, mai ales) şi tehnologie; le dă europenilor posibilitatea de a-şi construi o imagine matematică despre lume.

Sigur că la începutul Renaşterii matematica e încă un ansamblu de tehnici utile în rezolvarea unor probleme practice. Cărţile lui Pacioli, Tartaglia, Stevin, de exemplu, conţin un număr enorm de probleme de „aritmetică comercială". În plus, până spre jumătatea secolului XVI, matematicienii doar reiau, cu adăugiri minime, algebra islamică. Dar la jumătatea secolului XVI, dezvoltarea tehnologică a navigaţiei reclamă, ba chiar impune, un salt calitativ.

E o presiune pe care o resimte şi π. De exemplu, în 1559, Johannes Buteo publică *De quadratura circuli*, prima carte, din câte ştim, care conţine povestea completă a lui π. Buteo trece în revistă toate metodele, antice şi moderne, de calcul al lui π, arătând că stăpâneşte metoda lui Arhimede şi o consideră foarte importantă.

Cunoştinţele lui Peuerbach şi Buteo nu sunt la îndemâna tuturor, nici chiar a celor mai cultivaţi: în 1594, un filolog de la Universitatea din Leiden publică *Cyclometria elementa* (*Elemente de ciclometrie*), în care încearcă să demonstreze (eroare gravă!) că nu se pot utiliza poligoane cu un număr ridicat de laturi pentru aproximarea prin lipsă a circumferinţei cercului în care sunt înscrise, pentru că, spune el, deja un poligon

cu 12 laturi are un perimetru superior acelei circumferinţe. E clar că filologul habar n-are de matematică.

Una peste alta, la finele secolului XVI apar posibilităţi noi de calcul al lui π, cu precizie mereu sporită, graţie unor instrumente noi, ca tabelele trigonometrice mai corecte puse la punct de astronomi (Copernic şi Kepler printre ei), inventarea fracţiilor zecimale şi a logaritmilor, noua invenţie a lui Napier, regăsită ulterior, independent, de elveţianul Joost Bürgi.

Începuse între timp era celor pe care Petr Beckmann îi numeşte *digit hunters*, vânători de cifre. În 1585, Adriaan Anthoniszoon, de exemplu, găseşte o valoare a lui π cu primele şase zecimale corecte. Valoarea e cuprinsă între

$$\frac{377}{120} < \pi < \frac{333}{106}$$

care, exprimată în numere zecimale, este:

$$3{,}141509 < \pi < 3{,}141667$$

Şase zecimale nu sunt puţine, iar Anthoniszoon crede că a bătut un record, neştiind că al-Kashī ajunsese la a şaisprezecea cifră cu deja o sută de ani înainte. Ambii, olandezul şi iranianul, folosiseră aceeaşi veche şi veşnic tânără metodă a lui Arhimede.

7. Dincolo de Arhimede, François Viète

UNIVERSUL MATEMATIC

Dacă există vreo temă care interesează şi înflăcărează minţile matematicienilor europeni din secolul XVI, aceasta e raportul dintre algebră şi geometrie. Aşa cum va scrie peste câţiva ani Galileo Galilei în *Il Saggiatore*, mulţi sunt convinşi că universul e scris în „limba matematicii, ale cărei litere sunt triunghiurile, cercurile şi alte figuri geometrice".

Dacă universul e scris în limbajul geometriei, atunci numerele, invenţie umană, devin legitime doar în măsura în care pot fi exprimate sub formă geometrică. Ce înseamnă acest lucru am văzut când am vorbit despre numerele imaginare. Unii matematicieni susţin că acestea nu sunt „adevărate" tocmai pentru că nu se pot exprima în formă geometrică. Discuţia e aprinsă şi capătă repede accente filozofice, motiv pentru care Bombelli afirmă pragmatic că nu-l interesează natura lor, el doar calculează cu ele. Dar discuţia de natură filozofică are marele merit de a-i îndemna pe matematicieni să reflecteze la fundamentele disciplinei lor.

O figură centrală în această reflecţie e avocatul francez François Viète (1540–1603), un amator. Dar unul atât de bun încât ajunge să fie considerat cel mai mare matematician din secolul XVI. Elev al lui Pierre de la Ramée, domeniul

predilect al lui Viète e politica: deputat în Parlamentul Bretaniei, devine consilier al lui Henric III şi al lui Henric de Navarra. E însă un politician pasionat de ştiinţa numerelor, pe care o cunoaşte bine şi în care e capabil să producă cercetări originale.

Interesat de teoria numerelor, Viète pune practic capăt folosirii sistemului sexagesimal al anticilor şi îl impune definitiv pe cel zecimal. Se ocupă mult şi de trigonometrie, introducând o metodă analitică generală cunoscută ca goniometrie (ştiinţa măsurării unghiurilor). Pentru Viète, trigonometria e o disciplină de sine stătătoare şi mai ales foarte importantă, fiind universală: „trigonometria e gloria supremă a matematicienilor pentru că le permite să supună unui calcul minunat cerul, pământul şi marea deopotrivă" (*apud* Morris Kline).

Dar Viète se ocupă mai ales de tentativa de unificare a geometriei cu algebra. Cu acest scop în minte, demonstrează că noţiunea de ecuaţie propusă de Diofant nu e altceva decât ideea de proporţie din geometrie, iar pe această bază încearcă să construiască o algebră care să trateze problemele generale. Pentru rezultatele lui, Viète poate fi considerat fondatorul algebrei simbolice.

Ei bine, acest matematician amator, avocat şi om politic e primul care introduce, în preajma lui 1593, o nouă metodă pentru calculul lui π, una alternativă faţă de cea a lui Arhimede: este o metodă analitică, şi nu geometrică.

Viète e primul care trece dincolo de Arhimede. Interesul pentru π apare încă din tinereţe: în 1559, folosind metoda clasică a lui Arhimede, stabileşte corect primele nouă zecimale, calculând aria unui poligon cu 393 216 laturi, obţinut dublând de 16 ori laturile hexagonului iniţial. Găseşte:

$$3{,}1415926535 < \pi < 3{,}1415926537$$

E rezultatul cel mai precis obținut vreodată în Europa.

Dar Viète nu se mulțumește să calculeze. Caută o metodă nouă, pe care o și găsește mulți ani mai târziu, în 1593. Iată cum procedează: măsoară raportul dintre aria (A) a unui poligon cu n laturi și aria cercului în care e înscris acesta; apoi continuă folosind aria unui poligon cu număr dublu de laturi ($2n$), înscris în același cerc; apoi cu aria unui poligon cu $4n$ laturi și așa mai departe, la infinit. Pe măsură ce crește numărul laturilor, aria poligonului aproximează mai bine aria cercului. Folosind trigonometria și noțiunea de limită pe care o avem azi, dar pe care Viète încă nu o cunoștea, putem demonstra că

$$\lim_{n \to \infty} A(2^k n) = \pi r^2$$

Notația indică un produs reiterat oricât de multe ori, din care Viète deduce că:

$$2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \dots = \pi$$

Sfătuim cititorul să observe cu mare atenție această metodă analitică inventată de Viète, și asta din mai multe motive. În primul rând pentru că, o spunem din nou, e prima alternativă la metoda lui Arhimede. Apoi pentru că e prima din istoria matematicii în care apare o expresie analitică (o serie infinită de operații algebrice) pentru calculul lui π. Dar și pentru că, propunând această metodă, Viète e primul care folosește termenul „analiză“, iar această formulă e prima expresie din istoria matematicii conținând un produs infinit. În fine, pentru că aici se ivește o primă tentativă de calcul infinitezimal.

Nu e întâmplător că tot acest eșafodaj de noutăți e construit în jurul lui π.

Cu metoda sa, Viète arată că se pot atinge rezultate foarte precise, cel puţin în primă aproximaţie. Dar întrebarea e: produsul unui număr infinit de termeni chiar converge la „adevărata“ valoare a lui π? Matematicianul-politician nu cunoaşte răspunsul. Convergenţa produsului lui Viète va fi demonstrată abia trei secole mai târziu.

VÂNĂTORII DE ZECIMALE

Valoarea metodei inventate de Viète merge mult dincolo de posibilitatea calculării lui π cu precizie remarcabilă (dar după multă muncă: încercaţi să calculaţi de mână, de o mulţime de ori toţi radicalii prezenţi în formulă). Oricum, partida de vânătoare a *digit hunter*-ilor a început deja. Tot în 1593, olandezul Adriaan von Roomen, aplicând vechea metodă a lui Arhimede unui poligon cu 2^{30} (adică peste un miliard) de laturi, calculează valoarea lui π până la a 15-a zecimală. Dar şi el e învins după nici trei ani de un alt olandez, Ludolph van Ceulen, care ajunge la a 20-a zecimală, depăşindu-l pe persanul al-Kashī şi stabilind primatul mondial absolut. Chiar dacă firav, e un semnal că matematica europeană începe s-o ia înaintea celei antice şi a oricărei alte civilizaţii din lume.

Cert este că din acest moment „vânătorii de zecimale“ înregistrează succes după succes: în 1615, de pildă, acelaşi Ludolph van Ceulen furnizează o valoare a lui π precisă până la a 32-a cifră după virgulă.

Legenda vrea ca Ludolph van Ceulen să fi continuat să macine calcule după calcule şi că pe piatra sa de mormânt, din biserica Sfântul Petru din Leiden, ar fi inscripţionată valoarea lui π până la a 35-a zecimală. Din păcate, piatra s-a

pierdut, iar alt document care să ateste această a nu ştiu câta performanţă a lui nu există. Ceea ce nu-i împiedică pe unii germani să folosească şi azi denumirea de *Ludolphsche Zahl* (*numărul lui Ludolph*) pentru π.

Dar vânătoarea nu s-a încheiat. Graţie noului calcul diferenţial, la începutul secolului XVII astronomul Abraham Sharp ajunge la nivelul 62, iar în 1706 obţine primele 100 de zecimale. În 1717, francezul Thomas Fantet de Lagny îl depăşeşte, ajungând la a 127-a zecimală, în timp ce slovenul Jurij Vega atinge în 1794 nivelul 140 şi demonstrează că Lagny comisese o eroare la a 113-a cifră: pusese un 7 în loc de 8.

Europa nu e singură. În 1722, matematicianul japonez Takebe Katahiro aplică metoda lui Arhimede unui poligon cu 1024 de laturi şi calculează o valoare exactă cu 40 de zecimale. Mai târziu, în 1737, Matsunaga Yoshisuke foloseşte o dezvoltare în serie şi ajunge la 50 de zecimale.

Vânătoarea continuă şi după secolul XVIII, la ea participând sute de matematicieni care calculează luni la rând, uneori şi ani, umplând sute de pagini cu sume, produse, radicali... Rezumăm într-un tabel principalele etape ale „prelungirii" lui π. Recordul absolut dinaintea sosirii pe teren a computerului îi aparţine lui Donald Fraser Ferguson, din 1948.

Tabelul 2
Zecimalele lui π înainte de computer

Anul	Numele	Zecimale
Mileniul II î.C.	Anonim babilonian	3
III î.C.	Arhimede	5
Secolul V	Tsu Chung-Chih	7
1424	al-Kashī	16
1615	Ludolph von Ceulen	32
1702	Abraham Sharp	72
1706	John Machin	100

1717	Thomas Fantet de Lagny	127
1794	Jurij Vega	140
1844	Johann Dase	200
1847	Thomas Clausen	248
1853	William Rutherford	440
1855	Richter	500
1873	William Shanks	707
1948	Donald F. Ferguson	808

O observaţie interesantă face Petr Beckmann: toţi aceşti *digit hunters* se concentrează asupra lui π. Nici unul nu visează măcar să calculeze a 72-a, a 440-a sau a 808-a zecimală a lui $\sqrt{2}$ sau a lui $\sqrt{5}$. Or, nu există nici o motivaţie matematică sau practică pentru a calcula 72 sau 440 sau 808 zecimale ale lui π. Doar fascinaţia numărului îndeamnă la asemenea eforturi colosale cu iz sportiv.

Să revenim însă în secolul XVII. La sfârşitul lui, valoarea lui π e cunoscută până la a 30-a zecimală şi peste. La începutul secolului următor vor fi deja 72. Nu e doar o creştere cantitativă: e ceva mult mai radical. Căutarea valorii lui π cu un număr din ce în ce mai mare de zecimale încetează să mai fie o problemă practică, una care ar putea ajuta la construcţia unui edificiu, şi începe să devină o problemă matematică în sine, pură. Precizia cu care e calculat π devine un indicator al viabilităţii unei metode matematice. Capacitatea aceasta e preţuită deja în cursul secolului XVII, când dezvoltarea în serie *à la Viète* devine o metodă din ce în ce mai rafinată şi duce la inventarea calculului diferenţial de către Isaac Newton şi Gottfried Leibniz.

Numărul tot mai mare de zecimale ajuta şi la identificarea eventualelor secvenţe periodice după virgula lui π, era deci util în tentativa de a stabili natura lui π: este el un număr zecimal periodic, deci reprezentabil ca un raport de

numere întregi? Toate eforturile în această direcție au eșuat. Printre tot mai multele zecimale nu s-a observat nici o secvență periodică. Din ce în ce mai puternic își făcea loc bănuiala că π e un număr zecimal nelimitat și neperiodic. Un număr irațional. Un magnific număr irațional.

METODE NOI

Arhimede știa că perimetrul unui hexagon înscris într-un cerc e mai mic decât circumferința acelui cerc și că perimetrul unui hexagon circumscris unui cerc e mai mare decât circumferința acelui cerc. Știa deci că circumferința unui cerc are lungimea cuprinsă între perimetrul unui poligon înscris și perimetrul unui poligon circumscris și că, dacă măresc numărul laturilor poligonului înscris sau circumscris, diferența dintre circumferință și diametru tinde să scadă. Metoda cea mai bună pentru a-i găsi circumferinței cercului o limită inferioară și una superioară e calculul perimetrelor poligoanelor cu un număr din ce în ce mai mare de laturi. Cum acest număr nu are limită, fiind deci infinit, iată că, în principiu, se poate calcula valoarea lui π cu precizie oricât de mare.

În ciuda noutății seriei introduse de Viète, metoda lui Arhimede a rămas cea mai performantă până în secolul XVIII și până la descoperirea calculului diferențial și a dezvoltării în serie, care i-a permis lui Euler să calculeze în 1748, în mai puțin de o oră, valoarea lui π până la a douăzecea zecimală.

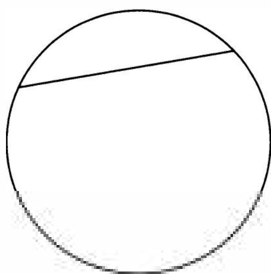
Metoda lui Euler nu era doar precisă, ci și foarte rapidă, bazată fiind, după cum scrie Petr Beckmann, pe dezvoltări în serii geometrice de tipul

$$S = a_0 \left(q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots \right)$$

unde a_0 e numărul format de primele d zecimale, iar $q = 10^{-d}$. Dezvoltarea acestei serii conduce la o formulă generală de tipul:

$$\pi = 3 + \frac{a_0}{1 - 10^{-d}}$$

Dar încă înainte de Euler şi după Viète nu lipsesc cei care caută o metodă geometrică, iar nu una algebrică, drept alternativă la metoda lui Arhimede. După aproape două milenii, matematicianul şi fizicianul olandez Willebrord Snell găseşte o asemenea metodă. În 1621, Snell publică *Cyclometricus*, carte în care propune un sistem bazat pe rectificarea arcului, adică pe reducerea unui arc de cerc la un segment.



Arcul respectiv e cel subîntins pe circumferinţă de una dintre laturile poligonului înscris. Ideea lui Snell va fi apoi demonstrată matematic, în 1654, de un alt mare matematician olandez: Christiaan Huygens.

Nu e o întâmplare că atâţia matematicieni din Ţările de Jos joacă un rol în povestea lui π. În decursul secolului XVII, axa economică şi ştiinţifică a Europei s-a deplasat din

Mediterana către Marea Nordului, din Italia către Franța, Anglia și chiar către Provinciile Unite, care nu doar obțin independența față de Spania, dar se și impun ca țara europeană cea mai bogată și dinamică. Dezvoltarea științei în Olanda e o reflectare și un cofactor ale noilor echilibre europene.

Să revenim însă la Huygens, savant eclectic care se aventurează și în matematică, demonstrând o serie de teoreme de geometrie cu care găsește două noi metode independente de calcul al lui π, ajungând la a zecea cifră zecimală. Cu metoda lui Arhimede, observă Huygens, ar fi fost necesar calculul perimetrului unui poligon regulat cu 400 000 de laturi. Nu vom intra în detalii. Cele două metode noi ale lui Huygens nu mai sunt interesante azi, fiind depășite de explozia calculului diferențial în lumea științifică.

8. Calculul diferențial

LIMITE, DERIVATE ȘI INTEGRALE

„Imediat după adoptarea conceptului de funcție [urmează] inventarea calculului infinitezimal care, după geometria euclidiană, e cea mai mare creație din întreaga matematică" (Morris Kline).

Conceptul de funcție fusese introdus de italianul Galileo Galilei, în timp ce calculul infinitezimal e creația englezului Isaac Newton și a germanului Gottfried Leibniz. Cei doi ajung la această idee în mod independent, iar revendicarea priorității duce la una dintre cele mai acerbe polemici din istoria științei.

Povestea lui π, începând cu Eudoxos și Arhimede, e dovada că noua invenție, calculul diferențial, nu e un fulger apărut din senin. Ceea ce nu știrbește cu nimic valoarea creației lui Newton și Leibniz, născută dintr-o necesitate precisă a fizicienilor secolului XVII, aflați în căutarea legilor mișcării și a unor mărimi greu de calculat, cum sunt viteza și accelerația instantanee.

Mai precis, dacă vreau să calculez viteza (v) cu care o săgeată parcurge traseul dintre arcul din care pleacă până la țintă, am de împărțit spațiul parcurs (s) la timpul necesar (t):

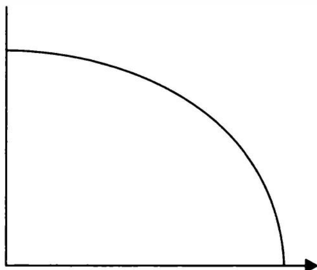
$$v = \frac{s}{t}$$

Dar, din mai multe motive, pe fizicienii secolului XVII îi interesează şi viteza din fiecare clipă a săgeţii şi variaţiile ei. Cum pot calcula viteza în fiecare clipă? Nu pot împărţi spaţiul la timp, pentru că ambele sunt zero iar 0/0 e un raport lipsit de semnificaţie matematică. Pe de altă parte, nu încape îndoială că săgeata sau orice alt obiect au, în fiecare clipă, o anume viteză. Cum o scoatem la capăt?

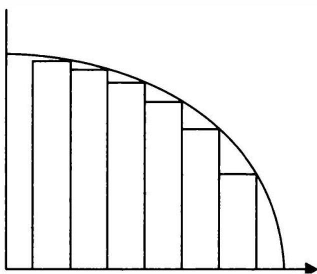
Aceasta e întrebarea la care răspund Newton şi Leibniz inventând o „nouă matematică" – calculul infinitezimal – şi ducând la bun sfârşit încercările lui Arhimede asupra conceptului de limită.

Problema algebrică poate fi transformată într-una geometrică. Tot ce am spus despre problema vitezei instantanee a săgeţii e valabil şi pentru problema găsirii tangentei la o curbă, care apare în optică. Sau, tot în legătură cu curbele, problema calculării lungimii lor, a maximului şi a minimului. Cu aceste provocări se luptă mai toţi marii matematicieni şi fizicieni ai secolului XVII, chiar dacă nu în manieră organică: de la Bonaventura Cavalieri la Gilles Personne de Roberval, de la Evangelista Torricelli la Pierre de Fermat, de la Christiaan Huygens la Isaac Barrow, de la John Wallis până la James Gregory. Ultimii doi, în particular, fac uz de tot ce se descoperise în direcţia calculului infinitezimal (înainte de Newton şi Leibniz) pentru determinarea valorii lui π – ba îşi aduc şi propriile contribuţii.

Wallis, de exemplu, autor al *Arithmetica infinitorum* (*Aritmetica infiniţilor*) din 1655, e foarte interesat să găsească o metodă pentru calculul ariei unui sfert de cerc:



şi crede că o bună aproximaţie se poate obţine calculând suma multor dreptunghiuri mici de lungime aleasă arbitrar şi cu înălţimea atingând arcul descris de cerc. Dacă aleg dreptunghiuri de lungime din ce în ce mai mică, crede Wallis, obţin o aproximare din ce în ce mai bună a ariei cuadrantului.



E uşor de arătat că astfel Wallis poate calcula, la fel ca Viète, valoarea lui π ca dezvoltare în serie infinită şi convergentă de produse. Aceasta e cu adevărat o piatră unghiulară în povestea lui π, susţine Petr Beckmann, pentru că, spre deosebire de Viète, care recursese la numere iraţionale ($\sqrt{2}$), Wallis e primul care-l calculează pe π cu operaţii în care intervin numai numere raţionale şi în care nu apar extrageri de rădăcini.

Vremurile sunt coapte pentru asemenea operaţiuni. Să nu ne mirăm deci că o metodă asemănătoare e pusă la

punct și de alt matematician englez, William Brouncker; într-adevăr, în a doua parte a secolului XVII, Anglia se impune, alături de Franța, ca lider al științei – în particular al matematicii.

Wallis demonstrează că metoda lui Brouncker e perfect echivalentă cu a sa. Dar cum a fost obținută independent, e clar că π încearcă să anunțe lumea că totul e pregătit pentru calculul infinitezimal.

Încă o dovadă? Iat-o. Scoțianul James Gregory ajunge la rezultate similare folosind arctangenta. Cine se pricepe la trigonometrie știe că arctangenta (notată *arctg*) e funcția inversă tangentei, definită în intervalul dintre –π/2 și +π/2. În termeni geometrici, putem spune că arctangenta lui x e, în valoare absolută, unghiul cel mai mic a cărui tangentă e x. Azi știm că limita la care tinde arctangenta lui x când x tinde la infinit e π/2:

$$\lim_{x \to \infty} arctg(x) = \frac{\pi}{2}$$

în timp ce limita când x tinde la minus infinit e –π/2. Sigur că James Gregory nu folosește aceste notații. De fapt, nu știm nici dacă el chiar a determinat valoarea lui π cu metoda sa. Știm numai că a calculat arctangenta ca dezvoltare a unei serii infinite care converge la π/2 destul de încet. Cu siguranță însă că s-a mai apropiat astfel cu un pas de crearea calculului diferențial.

Să încercăm deci să refacem, pe scurt, procesele prin care Newton și Leibniz au ajuns la formularea ideilor lor.

Născut în 1642, anul morții lui Galilei, la Woolsthorpe, un sat din parohia Costelworth din Lincolnshire, Isaac Newton intră în 1661 la Trinity College, fondat la Cambridge în 1546 de Henric VIII. Tânărul nu țintește o carieră de matematician. În primul an de studii totuși, Newton începe să aprofundeze matematica, dar pe cont propriu, în afara programului de studiu. Cumpără și citește *Elementele* lui Euclid. Devorează manualele lui William Oughtred, ale olandezului Frans van Schooten, ale lui Kepler, dar și cărțile lui Viète, Galilei, Huygens, Fermat. Cel mai mult îl impresionează *Geometria* lui René Descartes; e, de asemenea, influențat de opera lui John Wallis. În plus, din 1663 începe să urmărească cursurile lui Isaac Barrow, primul ocupant al Catedrei lucasiene de matematică, la rândul ei prima catedră de matematică de la Cambridge, instituită oficial de Carol II în 1664 în urma donației testamentare a lui Henry Lucas. Barrow se ocupă cu calculul tangentei la o curbă.

Sunt trei ani de studiu intens la sfârșitul cărora, la 22 de ani, Newton a asimilat deja matematica cea mai avansată din vremea lui. În primele luni ale lui 1665 e gata să producă prima sa contribuție originală: găsește o metodă generală pentru exprimarea funcțiilor în termeni de serii infinite. Pe de altă parte, începe să studieze ceea ce numește „fluxiuni", adică viteza cu care variază „fluenții", cum botează el mărimile matematice (lungimi, arii, volume) sau fizice (distanță, temperatură, timp). Se referă la „fluenții" care se schimbă continuu și care, din pricina asta, pot fi reprezentați grafic ca niște curbe continue. Azi numim *derivată* viteza cu care variază „fluenții".

Important e că, începând din acest moment, Newton pune laolaltă cele două probleme, dezvoltarea în serie și

viteza de variație, unificându-le în ceea ce el numește „metoda mea".

În același an 1665 ajunge la Londra vestea unei noi epidemii de ciumă care se răspândește pe continent. De fapt, la Londra nu ajunge doar vestea, ci și cumplita bacterie *Yersinia pestis* care provoacă dezastrul: ucide un londonez din șase.

Pentru a evita îmbolnăvirile, Trinity College se închide, iar Newton se întoarce în satul său. Se închide într-o cameră și, după cum spune Carl Boyer, transformă acele optsprezece luni în „perioada cea mai fecundă din întreaga istorie a matematicii".

Dar nu numai a matematicii. Pentru că în acele luni Newton descoperă legea gravitației universale și avansează în studiul naturii luminii. Așa că e vorba și de una dintre perioadele cele mai fecunde din istoria fizicii. Nu e deloc rău pentru un tânăr.

Dar să ne oprim la matematică. În acele optsprezece luni petrecute în satul natal, Newton demonstrează teorema binomului și, mai ales, descoperă calculul infinitezimal.

Cu formula binomului, tânărul arată că analiza bazată pe o serie infinită are aceeași coerență internă și e guvernată de aceleași legi ale algebrei care operează cu cantități finite: așadar „analiza obișnuită" (algebra) și analiza cu ajutorul dezvoltării în serie sunt omoloage, ambele făcând parte în mod legitim din „arta analitică", adică din analiza matematică.

E un salt conceptual deloc banal, având în vedere că și marii matematicieni elenistici încercaseră să evite confruntarea cu infinitul. Ei bine, Newton transformă infinitul într-un obiect matematic controlabil și extrem de util.

Tânărul nu-și publică imediat rezultatele. Anunță pentru prima dată formula binomului într-o notă trimisă pe

13 iunie 1676 către secretarul lui Societății Regale, Henry Oldenburg, pentru ca, la rândul său, acesta să i-o trimită lui Gottfried Leibniz. Iar în 1669 scrie *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (*Despre analiza prin ecuații cu un număr infinit de termeni*), în care își ilustrează abordarea analizei prin metoda dezvoltărilor în serii infinite. În același an, Newton îi urmează lui Barrow la catedra lucasiană de matematică de la Cambridge.

Cât despre calculul infinitezimal, Newton îl va expune în detaliu abia în *Philosophiae naturalis principia mathematica* (*Principiile matematice ale filozofiei naturale*), cunoscută ca *Principia*, pe care o publică în 1687, chiar dacă oferise o primă expunere sistematică și în *De analysi*.

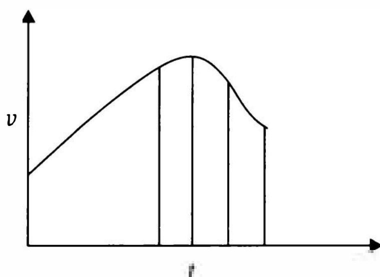
Acea primă expunere sistematică privește diferențierea, înțeleasă ca variație a unei funcții $f(x)$ la o creștere infinitezimală a variabilei x. Să luăm de exemplu funcția viteză (v) dată de raportul dintre spațiu (s) și timp (t):

$$v(t) = \frac{s}{t}$$

Newton verifică variația lui v la o creștere infinitezimală (care, la limită, poate fi nulă) a variabilei t, într-un anumit punct al spațiului. Azi scriem:

$$\lim_{t \to 0} v(t)$$

Dar Newton oferă o explicație generală și sistematică și pentru integrare, înțeleasă ca procedeu invers față de diferențiere, care-i permite să calculeze aria sub întinsă de o curbă (în exemplul precedent, ar fi curba desenată de funcția viteză).



Practic, pentru Newton, integrarea e o sumă: suma infinității de dreptunghiuri definite de curba descrisă de $v(t)$ atunci când timpul e descompus într-o succesiune infinită de *dt* oricât de mici, altfel spus, atunci când *dt* tind la o. Ulterior, Newton va scrie că trebuie abandonată ideea de cantitate infinitezimală, iar *dt* (și diferențialele oricărei variabile) trebuie considerate ca expresii ale unei „mișcări continue“, un fel de flux neîntrerupt al timpului (și al oricărei alte variabile). Această nouă formulare, susține el, e în acord cu geometria (continuului) celor din Antichitate.

Important în calculul diferențial al lui Newton e conceptul de limită, pentru că viteza instantanee, de exemplu, poate fi considerată ca raportul dintre spațiul parcurs de un obiect între timpul zero (t_0) și timpul unu (t_1) și intervalul de timp t_1-t_0, atunci când diferența $dt = t_1-t_0$ tinde la zero, adică e oricât de mică. Azi, această operație se numește derivata spațiului în punctul t_0. Din punct de vedere geometric, derivata e tangenta la curba $s(t)$ când t ia valoarea t_0.

Nu am ales întâmplător exemplul vitezei: cu metoda sa, Newton răspunde și acelor filozofi ai naturii (în particular, lui însuși) care vor un sistem de calcul al vitezei instantanee a unui obiect care se deplasează în spațiu.

Creaţia lui Newton nu e *ex nihilo.* Calculul infinitezimal datorează mult altora, începând cu Eudoxos şi Arhimede. Dar şi în secolul XVII sunt destui care s-au luat de piept cu problema calculului ariei sub întinse de o curbă şi cu calculul diferenţial. Chiar Isaac Barrow, maestrul lui Newton, publicase în 1670 o metodă de diferenţiere analoagă celei a lui Newton. Posibilitatea găsirii ariei subîntinse de o curbă printr-o metodă inversă faţă de diferenţiere le era cunoscută şi lui Gregory, iar mai înainte lui Torricelli şi Fermat. Dar în *De analysi* Newton oferă primul exemplu concret din istorie, calculul unei arii cu metoda inversă faţă de diferenţiere, adică prin integrare.

După părerea lui Carl Boyer, Isaac Newton trebuie considerat „inventatorul efectiv al calculului infinitezimal, pentru că a fost capabil să fructifice relaţia inversă dintre panta şi aria unei curbe folosindu-se de noua sa analiză infinită“. Newton nu e primul care diferenţiază sau integrează. Descoperirea sa constă, spune Boyer, în coordonarea acestor operaţii şi în elaborarea unui „algoritm general aplicabil tuturor funcţiilor, fie ele algebrice ori transcendente“.

Spre sfârşitul secolului XVII, Newton redactează o nouă prezentare a calculului infinitezimal, *De quadratura curvarum* (*Despre cuadratura curbelor*). În expunerea completă din *Principia* recunoaşte că circulă prin Europa un alt matematician care posedă o metodă de calcul infinitezimal asemănătoare, chiar dacă nu omoloagă: Gottfried Leibniz.

GOTTFRIED LEIBNIZ

Leibniz se naşte la Leipzig, în 1646. În 1661 se înscrie la universitatea locală şi în 1663 îşi ia deja diploma de licenţă. Studiază dreptul, teologia şi matematica. Îşi ia doctoratul în

drept la Universitatea Altdorf din Nürnberg, iar în 1666 scrie *De arte combinatoria*, operă în care propune ceea ce a fost definit drept o metodă generală de a raționa. Dar nu vrea să-și predea la catedră metoda, preferând să se dedice muncii diplomatice, întâi pe lângă prințul elector din Mainz, apoi cu familia Brunswick și, în sfârșit, cu cea de Hanovra, în serviciul căreia rămâne patruzeci de ani.

În 1672 Leibniz e la Paris, membru al unei delegații germane care negociază cu reprezentanții lui Ludovic XIV într-o tentativă de a opri Franța să anexeze noi teritorii germane. În acest scop îi sfătuiește pe francezi să-și îndrepte apetitul de cuceritori spre Egipt – sfat ce avea să fie urmat de Napoleon după mai bine de un secol. La Paris, Leibniz intră în contact cu Huygens, care îi sugerează, pentru completarea culturii matematice, să-l citească pe Blaise Pascal.

În 1673, tânărul Leibniz se află la Londra, tot în misiune diplomatică. E deja un matematician faimos, așa că e cooptat în Societatea Regală. Îl studiază pe Barrow, și nu e exclus ca, tocmai cu această ocazie, să fi citit *De analysi* a lui Newton. Dar nu e capabil s-o asimileze până la capăt pentru că pregătirea sa în analiză și geometrie are încă goluri.

Cu totul alta e situația când, în 1676, revine la Londra aducând cu sine o mașină de calculat pe care a pus-o recent la punct, întreaga sa nouă pregătire în domeniul seriilor infinite și o metodă la fel de generală cu a lui Newton pentru calculul diferențial al oricărei funcții, rațională sau irațională, algebrică ori transcendentă. Termenul din urmă a fost inventat chiar de Leibniz și indică toate funcțiile nealgebrice: logaritmii, exponențialele și cele trigonometrice.

Leibniz propune și un nou simbolism. Notează cu d o diferență infinitezimală și (mai târziu) cu $\int$ o sumă de mărimi infinitezimale. Diferențele minime posibile ale unei

variabile x, de exemplu, sunt notate dx iar integralele (adică sumele) cu simbolul $\int$.

Leibniz propune prima prezentare completă a calculului diferențial și integral în *Acta eruditorum* din 1684, deci înainte ca Newton să publice *Principia*. Acesta e motivul pentru care Newton recunoaște că Leibniz a ajuns la rezultate analoage cu ale sale.

De fapt, mai târziu, între cei doi (și mai ales între susținătorii lor) va începe una dintre cele mai importante dispute științifice din toate timpurile. Fără a intra în detalii, să spunem doar că spre sfârșitul secolului XVII atât Newton, cât și Leibniz se străduiesc să aprofundeze „noua matematică" și că amândoi au ajuns independent la calculul diferențial – chiar dacă Newton l-a dezvoltat cu zece ani înaintea lui Leibniz, iar Leibniz l-a publicat cu trei ani înainte de Newton. În definitiv, după cum spune Morris Kline, „trebuie să le atribuim amândurora meritul de a fi văzut în calculul infinitezimal o nouă metodă generală aplicabilă unui mare număr de funcții. După ei, calculul infinitezimal nu va mai fi niciodată un simplu apendice sau o extensie a geometriei grecești, ci va fi o știință independentă, capabilă să rezolve o gamă extrem de întinsă de probleme".

NEWTON ȘI π

Adevărul e că între 1665 și 1666, când tânărul Newton se ascunde de ciumă în satul lui, introduce calculul diferențial și definește teoria gravitației universale, nu la π îi stă mintea. Dar e un geniu și are nevoie de puțin ca să realizeze ce alții nu obțin într-o viață. Newton pune astfel o piatră unghiulară și în povestea lui π, chiar dacă nu i-a acordat multă atenție.

În sejurul său la Woolsthorpe, Newton pune la punct o metodă generală pentru dezvoltarea unei funcții, a integralei sale sau a derivatei în serie infinită, și găsește o serie infinită și pentru π. Unii ar spune că o făcuse deja Gregory. Așa e, dar metoda lui Newton face calculul precis și rapid ca niciodată până atunci.

Metoda lui Gregory, preluată și dezvoltată de Leibniz, e mult mai puțin eficace decât a lui Arhimede: nici măcar cu primii 300 de termeni ai seriei nu ajunge la primele două zecimale ale lui π.

Dimpotrivă, metoda lui Newton constituie un salt calitativ în povestea lui π. Newton pune la punct o metodă pentru calculul integralei unei funcții, metodă cu care găsește rapid primele 16 zecimale ale lui π, greșind doar la ultima cifră. Grație calculatoarelor, metoda lui Newton permite calculul lui π ușor și rapid.

9. π devine π

SECOLUL XVIII

Isaac Newton moare în 20 martie 1727, omagiat de poporul englez. Dar încă din timpul vieţii lui raportul dintre circumferinţă şi diametru fusese notat cu π. Până atunci nu existase vreun simbol folosit de toţi pentru a indica acest raport. Europenii, de exemplu, foloseau o serie de locuţiuni latine: *quantitas, in quam cum multiplicetur diameter, proveniet circumferentia.* La începutul secolului XVIII însă, un alt englez, William Jones, introduce simbolul care va lega pe vecie numele meu de un obiect matematic. O face în cartea *Synopsis Palmariorum Matheseos: or, a New Introduction to the Mathematics*, publicată în 1706.

Totuşi, William Jones nu e Isaac Newton, adică nu e un personaj faimos nici măcar în restrânsa comunitate a celor care studiază numerele. Aşa că π devine π abia în 1737, când simbolul va fi utilizat de unul dintre cei mai mari matematicieni ai vremii, elveţianul Leonhard Euler, în articolul *Variae observationes circa series infinites* (*Câteva observaţii asupra seriilor infinite*)*.

---

* Euler alege acest simbol pentru că π e perimetrul cercului de diametru 1. (*N. t.*)

Nu e uşor să urmărim deplasările lui Euler prin Europa. Încă şi mai greu e să citim tot ce a scris şi, mai ales, să trecem în revistă tot ce a creat în matematică. Să spunem doar că, după ce a impus simbolul π, Euler a închis şi partida de vânătoare găsind modul cel mai rapid pentru a-l calcula, şi ţintuieşte acest număr (şi numele meu) în ceea ce e considerată cea mai frumoasă formulă matematică din toate timpurile:

$$e^{i\pi}+1=0$$

Măiestria lui Euler constă, în primul rând, în a fi găsit o serie infinită care converge la π extrem de rapid. De fapt, încă din 1706 matematicianul englez John Machin găsise un mijloc de a face seria lui Gregory să conveargă mai repede, ceva de tipul:

$$\pi=4\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\ldots\right)-4\left(\frac{1}{239}+\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-\ldots\right)$$

Euler combină formula lui Machin cu o dezvoltare în serie a cotangentei, care converge foarte rapid şi ajunge la o serie care converge şi mai rapid. Pe scurt, demonstrează că:

$$\pi=20\,arctan\left(\frac{1}{7}\right)+8\,arctan\left(\frac{3}{79}\right)$$

şi, calculând cele două arctangente din membrul drept cu seria sa, determină primele 20 de zecimale ale lui π în mai puţin de o oră:

$$\pi_{\text{Euler}}=3{,}14159265358979323846$$

Rețineți formula lui Euler, pentru că, după el, mulți vor găsi noi metode de calcul pentru π, dar nici una mai rapidă.

Euler, am văzut, e legat de π și prin celebra sa identitate, caz particular a ceea ce cunoaștem sub numele de „formula lui Euler“, care leagă funcțiile trigonometrice de funcția exponențială complexă:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

În plus, Euler readuce în actualitate tema naturii lui π: ce neam de număr e ăsta, rațional ori irațional? Încă nu știm, spune Euler. Dar e timpul să aflăm, odată pentru totdeauna.

METODA MONTE CARLO

Înainte de a răspunde acestei întrebări stăruitoare, să mai spunem câte ceva despre metodele moderne de calcul al lui π.

Pe la 1777, matematicianul francez Georges-Louis Leclerc, conte de Buffon, propune o problemă pe care o și rezolvă cu dibăcie. Dat un ac de lungime l care poate cădea liber pe un plan orizontal împărțit prin linii paralele în benzi de lățime egală $d > l$, care e probabilitatea p ca acul să intersecteze o linie a rețelei (deci să nu cadă cu totul în interiorul uneia dintre benzi)? Nu vom reda demonstrația, dar vom aminti că Buffon găsește că probabilitatea depinde de π prin formula:

$$p = \frac{2l}{\pi d}$$

În 1812, problema și soluția lui Buffon sunt reluate de un alt matematician francez, Pierre-Simon, marchiz de Laplace, faimos pentru cele cinci cărți despre *Mecanica cerească*, opera

cea mai importantă după *Principia* lui Newton pentru mecanica clasică. Pentru matematică însă, nici a sa *Teorie analitică a probabilităţilor* nu e mai puţin importantă, carte în care, între altele, reia formula lui Buffon şi o rescrie astfel ca să dea o valoare a lui π:

$$\pi = \frac{2l}{pd}$$

Într-un fel, formula asta deschide o posibilitate experimentală de a găsi valoarea lui π. Pentru că, dacă sunt daţi l şi d, atunci ajunge să lăsăm să cadă acul un număr suficient de mare de ori şi găsim probabilitatea ca el să intersecteze una dintre liniile paralele. După Petr Beckmann, se pare că un ofiţer american, căpitanul Fox, ar fi investit multe ore în jocul ăsta în timpul războiului civil dintre nordişti şi sudişti din 1861–1865.

Metoda statistică a lui Buffon şi Laplace a fost mult dezvoltată pe la jumătatea secolului XX şi a devenit cunoscută drept „metoda Monte Carlo".

Sigur că nu e necesar ca noua metodă experimentală propusă de Laplace să folosească un ac adevărat care chiar cade pe un plan adevărat. E suficient să considerăm un eveniment aleatoriu oarecare pe care să-l repetăm de suficient de multe ori. Putem obţine zecimala de pe poziţia k repetând evenimentul de N ori. Dar lucrurile nu sunt chiar banale. După cum aminteşte Petr Beckmann, dacă vreau să calculez a cincea zecimală a lui π şi las să las să cadă acul de 3 400 de ori, obţin o cifră a cărei probabilitate de a fi cea corectă e abia de 1,5%.

Evident, se vor găsi întotdeauna persoane suficient de răbdătoare, precum căpitanul Fox, capabile să-şi piardă timpul lăsând să cadă acul de zeci de mii de ori. Dar cu un

ac adevărat nu se va ajunge prea departe. Aşa că nu e greu de imaginat că metoda Monte Carlo nu are mare succes până la intrarea în scenă a calculatoarelor, care schimbă complet jocul. Odată programată corect, chiar şi o maşină mai degrabă lentă care lasă să cadă un ac virtual pe un plan virtual doar de 1 000 de ori pe secundă produce într-o oră 3,6 milioane de evenimente: un număr care începe să devină interesant. Una peste alta, încredinţată calculatorului, metoda Monte Carlo se dovedeşte extrem de utilă pentru a calcula o mulţime de cifre zecimale ale lui π.

π ÎN ERA CALCULATOARELOR

Donald Fraser Ferguson, de la Royal Naval College din Anglia, are nevoie de un an întreg pentru a calcula primele 808 zecimale ale lui π cu formula:

$$\frac{\pi}{4} = 3\arctan\left(\frac{1}{4}\right) + \arctan\left(\frac{1}{20}\right) + \arctan\left(\frac{1}{1985}\right)$$

Munca lui ia sfârşit în 1949 şi e uşurată (un fel de-a spune) de o primitivă maşină de calculat de birou. Din acest motiv, unii îl consideră pe Ferguson ultimul „vânător de zecimale“ de mână, iar alţii drept primul dintre „vânătorii de zecimale“ cu calculatorul (sau unul dintre primii). O maşină de calculat de birou nu e chiar un calculator, chiar dacă e un instrument automat destul de puternic. Putem fi deci de acord că D.F. Ferguson e un clasic personaj de tranziţie, veriga de legătură dintre calculul lui π de mână şi cel cu calculatorul.

Tabelul 3
Vânătorii de zecimale în era calculatoarelor

Numele	Data	Număr de zecimale	Calculator
Ferguson	Ian 1947	710	Calculator de birou
Ferguson, Wrench	Sept 1947	808	Calculator de birou
Smith, Wrench	1949	1120	Calculator de birou
Reitwiesner *et al.*	1949	2037	ENIAC
Nicholson, Jeenel	1954	3092	NORC
Felton	1957	7480	PEGASUS
Genuys	Ian 1958	10 000	IBM 704
Felton	Mai 1958	10 021	PEGASUS
Guilloud	1959	16 167	IBM 704
Shanks, Wrench	1961	100 265	IBM 7090
Guilloud, Filliatre	1966	250 000	IBM 7030
Guilloud, Dichampt	1967	500 000	CDC 6600
Guilloud, Bouyer	1973	1 001 250	CDC 7600
Miyoshi, Kanada	1981	2 000 036	FACOM M-200
Guilloud	1982	2 000 050	
Tamura	1982	2 097 144	MELCOM 900II
Tamura, Kanada	1982	4 194 288	HITACHI M-280H
Tamura, Kanada	1982	8 388 576	HITACHI M-280H
Kanada, Yoshino, Tamura	1982	16 777 206	HITACHI M-280H
Ushiro, Kanada	Oct 1983	10 013 395	HITACHI S-810/20
Gosper	Oct 1985	17 526 200	SYMBOLICS 3670

Bailey	Ian 1986	29 360 111	CRAY-2
Kanada, Tamura	Sept 1986	33 554 414	HITACHI S-810/20
Kanada, Tamura	Oct 1986	67 108 839	HITACHI S-810/20
Kanada, Tamura, Kubo	Ian 1987	134 217 700	NEC SX-2
Kanada, Tamura	Ian 1988	201 326 551	HITACHI S-810/80
Čudnovskij D. şi G.	Mai 1989	480 000 000	
Čudnovskij D. şi G.	Iun 1989	525 229 270	
Kanada, Tamura	Iul 1989	53 687 0898	
Čudnovskij D. şi G.	Aug 1989	1 011 196 691	
Kanada, Tamura	Nov 1989	1 073 741 799	
Čudnovskij D. şi G.	Aug 1991	2 260 000 000	
Čudnovskij D. şi G.	Mai 1994	4 044 000 000	
Kanada, Tamura	Iun 1995	3 221 225 466	
Kanada	Aug 1995	4 294 967 286	
Kanada	Oct 1995	6 442 450 938	
Kanada, Takahashi	Aug 1997	51 539 600 000	HITACHI SR2201
Kanada, Takahashi	Sept 1999	206 158 430 000	HITACHI SR2201

Sursa: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Pi_chronology.html

Tabelul 3, propus de MacTutor History of Mathematics Archive, rezumă evoluţia calculului lui π în era calculatoarelor. Computerul intră în lumea „vânătorilor de zecimale" prin ENIAC (Electronic Numerical Integrator) al Ballistic Research Labs, un centru de cercetări al armatei americane aflat în Maryland. ENIAC foloseşte formula lui Machin:

$$\frac{\pi}{4} = 16\,arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4\,arctan\left(\frac{3}{239}\right)$$

iar în septembrie 1949 are nevoie de circa 70 de ore ca să calculeze primele 2 037 de zecimale, bătând de departe recordul abia stabilit de Ferguson.

Peste cinci ani, computerul NORC (Naval Ordnance Research Calculator) din Dahlgren, Virginia, calculează primele 3 089 zecimale în numai 13 minute.

Urmează o serie de calcule cu care e dificil să ţinem pasul, cu formule matematice extrem de diverse. Cota 10 000 de zecimale e atinsă în 1961 de IBM 7090; cota de jumătate de milion în 1967, cu CDC 6600; cota un milion în 1973, de CDC 7600. La sfârşitul lui 1999, zecimalele calculate depăşesc 200 de miliarde.

În octombrie 2010, Nicholas Sze, de la Yahoo!, a anunţat că a calculat primele 2 milioane de miliarde de zecimale ale lui π lăsând să lucreze 1 000 de computere timp de 23 de zile.

Ne oprim aici cu recordurile. Însă nu înainte să amintim că:

a) computerele funcţionează bine pentru că iau în considerare şi numerele iraţionale, chiar dacă, din motive evidente, aproximându-le;

b) valoarea lui π folosită în computerele noastre nu trece de a 17-a cifră zecimală, astfel încât să calculezi 2 milioane de miliarde de zecimale nu are nici o utilitate practică;

c) de fapt, o utilitate are: calculul exact şi extins al lui π a devenit un test universal de fiabilitate pentru computere;

d) cine ştie câte alte calculatoare din lume tocmai calculează primele miliarde de miliarde de zecimale ale lui π;

e) până acum, nimeni nu a găsit vreo regularitate în această lungă serie de cifre.

De altfel, azi suntem siguri că nimeni, niciodată nu va putea găsi vreo regularitate. Pentru că de-acum cunoaştem natura lui π.

10. Natura lui π

Primul care dezleagă, sau măcar începe să dezlege misterul adevăratei naturi a lui π este, în 1767, elvețianul Johann Heinrich Lambert. La întrebarea pusă mai mult sau mai puțin explicit încă de pe vremea lui Pitagora și Hippasos – ce fel de număr e π? – Lambert răspunde: la fel ca $\sqrt{2}$, numărul π nu e rațional.

π e un număr irațional.

Adică: un număr cu o infinitate de zecimale neperiodice. Ceea ce înseamnă că, la fel ca raportul dintre latura și diagonala unui pătrat, raportul dintre circumferința și diametrul unui cerc nu poate fi exprimat nici ca un număr întreg, nici ca un raport de numere întregi.

Dar să intrăm un pic în detaliile istoriei cercetărilor asupra naturii lui π, pornind iarăși de la Arhimede, care rezolvă, măcar în principiu, problema practică a atribuirii unei valori precise lui π. Cu metoda lui se pot calcula oricât de multe zecimale – timp să fie și chef de un maraton computațional. Rămânea problema teoretică. Anume, câte cifre zecimale are π. Altfel spus, care e adevărata lui natură.

Urmează apoi episodul de la Crotone, din secolul VI î.C.: într-o bună zi, tânărul Hippasos din Metapont demonstrează că o entitate geometrică simplă și bine definită,

anume diagonala unui pătrat, e incomensurabilă, pentru că, dacă încerc s-o traduc în cifre, obțin un număr cu o serie infinită de zecimale fără nici o periodicitate. În particular, convingerea maestrului său, Pitagora, că orice din natură se poate exprima ca un număr întreg sau ca un raport de numere întregi e greșită. Descoperirea acestui număr incomensurabil, $\sqrt{2}$ (corespunzător diagonalei pătratului de latură 1) îl costă pe bietul Hippasos viața, vinovat de a fi zdruncinat temeliile interpretării raționale cu care Pitagora crezuse că poate explica armonia cosmică. Acesta e motivul pentru care numerele rebele ca acesta găsit de Hippasos vor fi numite iraționale.

Întrebarea care străbate epoca clasică a istoriei grecești și ajunge până în epoca elenistică e deci aceasta: care e adevărata natură a lui π? Corespunde constanta asta fundamentală a lumii geometrice raționalității lui Pitagora, sau e rebelă și irațională, ca numerele lui Hippasos? Întrebare relevantă și din punct de vedere filozofic, pentru că readuce în joc natura – ba chiar calitatea – raportului dintre realitatea abstractă a matematicii și realitatea fizică a lumii. Dar din punct de vedere matematic întrebarea aceasta e decisivă: tocmai punându-și-o, Euler dă startul unei perioade care va vindeca rana deschisă de Hippasos și va duce la elaborarea „teoriei numerelor iraționale".

Astfel, după Arhimede, povestea lui π se bifurcă. Pe de o parte, problema practică, de ordin computațional, a calculării constantei cu un număr mereu mai mare de zecimale, pe de altă parte, problema teoretică de a-i descoperi natura ultimă. E clar că prima problemă nu admite o soluție definitivă: cunoaștem azi milioane de miliarde de zecimale, iar acest calcul reprezintă un stimul și un mod de a evalua forța brută (puterea de calcul) a unui computer. În

calculul acesta se poate pierde şi cel mai insaţiabil maniac. Mult mai puţin evanescentă şi, poate, mult mai interesantă e soluţia celei de-a doua probleme, natura matematică a lui π.

Aşadar, în 1767 Lambert demonstrează limpede şi definitiv că π e iraţional, ceea ce cam toată lumea bănuia de mult. Povestea însă continuă. În 1794, francezul Adrien-Marie Legendre dă o demonstraţie mai riguroasă iraţionalităţii lui π şi, în plus, arată că şi pătratul său e iraţional:

$$\pi^2 = 9,8696044011... = \text{zecimale infinite, neperiodice}$$

Una peste alta, dac-am fi pitagoreici, ar trebui să ne sfâşiem hainele de pe noi de ciudă: numărul ăsta e de o iraţionalitate totală şi ireductibilă, nu e nici măcar rădăcina unui număr raţional, cum este totuşi $\sqrt{2}$, al cărui pătrat e 2, un număr întreg.

Evident că toate acestea nu strică ordinea cosmică, nici raţiunea şi nici chiar raţiunea matematică; dimpotrivă, îl ajută pe un alt mare matematician francez, Joseph Liouville, să demonstreze în 1844 existenţa unui nou tip de numere: numerele transcendente. Acestea sunt, prin natura lor, diferite de numerele algebrice. Diferenţa fusese introdusă chiar de Euler, potrivit căruia sunt algebrice acele numere care pot fi rădăcini ale unei ecuaţii polinomiale cu coeficienţi întregi (ecuaţie algebrică). Toate numerele raţionale şi multe numere iraţionale sunt rădăcini ale unor astfel de ecuaţii, deci sunt algebrice. Euler însă formulează ipoteza existenţei unor numere iraţionale care nu pot fi algebrice şi le numeşte transcendente, pentru că ele „transcend puterea metodelor algebrice“ (*apud* Kline); apoi Liouville demonstrează că ipoteza lui Euler e corectă, numerele transcendente există.

Întrebarea e deci: este π un număr iraţional algebric sau transcendent? Răspunsul vine în 1882, când germanul

Ferdinand von Lindemann demonstrează că π e transcendent. Demonstrația lui nu are doar valoare taxonomică şi, dacă vreți, filozofică; are şi o remarcabilă valoare matematică, pentru că din ea rezultă că problema cuadraturii cercului, cea pusă în secolul V î.C. de Anaxagoras şi niciodată rezolvată, nu admite soluție.

Cât despre importanța numerelor transcendente, ea devine limpede peste câțiva ani prin opera unui alt matematician german, Georg Cantor, părintele teoriei mulțimilor. Cantor susține că toate numerele algebrice (raționale şi iraționale laolaltă) formează o mulțime „numărabilă", adică una infinită, dar care poate fi pusă în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor naturale, în timp ce numerele transcendente formează o mulțime „nenumărabilă", adică nu poate fi pusă în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor naturale. De aici, Cantor deduce că mulțimile infinite nu sunt toate la fel de bogate, ci de ordine diferite, care pot fi descrise cu nişte numere noi, transfinite, numite numere cardinale, pentru care construieşte o nouă aritmetică.

Una peste alta, azi ştim că gentilul şi insistentul meu persecutor, π, e un număr irațional şi transcendent. Fiți convinşi însă că povestea lui π continuă.

11. π superstar

SĂRBĂTOAREA LUI π

Pe 8 ianuarie, primesc un e-mail de la un profesor de matematică din Reggio Emilia: „Stimate domnule doctor P. Greco, am vrea să vă invităm la liceul ştiinţific local Blaise Pascal pentru a sărbători alături de dumneavoastră «ziua lui pi». Cum probabil ştiţi, acesta e un an special, ziua dedicată lui π cade pe 14 martie 2015, care în zona anglo-saxonă se scrie 3.14.15, semănând mult cu 3,1415: π cu primele sale patru zecimale. Nu puteţi lipsi: următoarea ocazie va fi abia peste o sută de ani (14 martie 2115)". „Dar de ce v-aţi gândit la mine?", întreb – întrebare evident retorică. „Păi, din pricina prenumelui şi a numelui – îmi răspunde profesorul –, dar şi pentru că am dat peste un articol mai vechi al dumneavoastră despre povestea lui π".

Faptul că cineva – chiar profesor de matematică – a păstrat un articol al lui P. Greco despre π mă face să zâmbesc amuzat. Dar mă şi emoţionează şi mă stimulează. Nu doar că accept invitaţia liceului, dar mă hotărăsc ca, dacă editorul va fi de acord, să scriu o carte despre povestea lui π. Nu va fi, evident, prima, dar, oricum, nu citeşti în fiecare zi pe o copertă

Pietro Greco

Povestea lui π

Dacă citiți această carte, e semn că editorul a acceptat ideea. Până una alta, eu mă duc la Reggio Emilia și mă pregătesc. Începând prin a răspunde la întrebarea: cine o fi avut primul ideea de a sărbători numărul ăsta pe 14 martie?

Descopăr că genialul poznaș e un fizician american bărbos, Larry Shaw, care, amuzat de faptul că 14 martie se poate scrie 3,14, propune Exploratoriumului din San Francisco să organizeze sărbătoarea. O altă coincidență. Suntem în anul 1988. Exploratoriumul din San Francisco e prototipul muzeelor științifice din noua generație. Acelea numite *hands on*, unde e „interzis să nu atingi obiectele“, pentru că e obligatoriu să atingi cu mâna obiectele expuse. Ei bine, tocmai în acele luni, Vittorio Silvestrini și un grup de colaboratori din Napoli se gândesc la un muzeu de acest fel, care va și lua ființă destul de repede sub numele de Orașul Științei – m-am numărat printre fondatori și am fost membru în consiliul lui de administrație. Încă o dată, viața mea se intersectează cu a lui π.

Cum s-a terminat, până la urmă, cu sărbătoarea lui π, se știe de-acum. În 2009, în plină criză economică, președintele Statelor Unite, Barack H. Obama, caută un mod de a-i încuraja pe tineri să studieze matematica, fiind el convins că știința numerelor și, în general, știința constituie calea cea mai bună pentru dezvoltarea și progresul națiunii sale. Om politic cu viziune, Obama. Și care e instrumentul cu care vrea el să-i încurajeze pe tineri să studieze matematica? Evident, oficializarea sărbătorii lui π. Dedică ziua de 14 martie, fiecare zi de 14 martie, celui mai faimos număr.

Alegerea a fost bine primită şi a trecut repede graniţele Statelor Unite. Aşa că, de câţiva ani, şi noi, în Italia, îl serbăm pe π cu numele meu şi în ziua naşterii savantului pe care, alături de Arhimede, îl admir cel mai mult: Albert Einstein.

POEZIA LUI π

Ai o pasiune cam infantilă, veţi spune. Un număr e un număr, nimic mai mult. Îi dai atâta importanţă doar pentru că, din întâmplare, numele tău seamănă cu felul în care se pronunţă el în italiană. Dar în π nu e nimic profund, nimic care să treacă dincolo de rolul, sigur de neocolit, pe care l-a avut în istoria matematicii.

Bine, dacă asta-i părerea voastră, atunci explicaţi-mi voi de ce poloneza Wisława Szymborska, laureata premiului Nobel pentru Literatură în 1996, i-a dedicat o poezie? Iat-o:

Despre π

Minunatul număr pi:
trei virgulă unu patru unu.
Toate cifrele care urmează sunt iniţiale şi ele,
cinci nouă doi, el nesfârşit fiind.
Nu-l cuprinzi *şase cinci trei cinci* cu privirea,
opt nouă calculând,
şapte nouă sau închipuindu-ţi,
nici *trei doi trei opt* în glumă, adică prin comparaţie
patru şase cu orice altceva
doi şase patru trei din lumea asta.
Cel mai lung şarpe terestru se gată după cam doişpe metri.
La fel şi şerpii din mituri şi basme, chiar dacă ei ţin un pic mai mult.
Şirul de cifre care compun numărul pi

nu se oprește la marginea foii,
reușește cumva să stăruie pe masă, în aer,
o ia în sus pe zid, peste crengi, peste cuiburi, prin nori, drept către cer,
prin toate paradisurile umflate și fără de sfârșit.
Vai, ce scurtă e coada cometei, ca a unui șoricel!
Cât de slabă e lumina unei stele, și cum se curbează ea în spațiu!
Dar uită-te la *doi trei cincisprezece trei sute nouăsprezece*
numărul meu de telefon, numărul tău la cămașă
anul o mie nouă sute șaptezeci și trei etajul șase
număr de locuitori șaizeci și cinci de sutimi
ia-mă de mijloc două degete o ghicitoare și-o cifră,
în care zboară cioară *și cântă, privighetoare*
și *vă rugăm să vă păstrați calmul*
astfel *cerul și pământul vor trece*,
dar pi nu, acela nu, nicicum,
veșnic cu al lui încă *cinci*,
un nu oricare *opt*,
un deloc ultim *șapte*,
îndemnând, da, îndemnând leneșa eternitate
să dureze.

Poezia face parte din culegerea *Numere mari (Wielka Liczba)* din 1976. Am aflat despre ea abia când am ajuns la liceul Blaise Pascal și profesorul care m-a invitat, prieten de-acum, mi-a dăruit-o (da, da: a dărui e verbul corect).

π încălzește sufletul unei mari poete; de ce nu l-ar încălzi pe-al meu și pe-al vostru?

Concluzii

Mă hotărâsem să închei cartea cu poezia Wisławei Szymborska şi cu întrebarea despre sufletul meu şi-al vostru când, neavând habar de truda mea, fetiţa mea, Gaia, îmi spune: „Ştii, tata, că pot să-ţi spun pe de rost primele şaisprezece cifre ale lui π?“

Gaia nu ştie că scriu o carte despre π, întrebarea ei e ingenuă. Dar şi-a inventat o poezioară în care fiecare cuvânt începe cu o literă a cărei poziţie în alfabet e cea indicată de cifrele lui π . Nu-mi amintesc poezioara lui Gaia (n-a vrut să mi-o scrie), dar e ceva de genul:

Cu	⇨	C = 3
Andrei	⇨	A = 1
Da	⇨	D = 4
Ambra	⇨	A = 1
Este	⇨	E = 5
Izabela	⇨	I = 9
Bună	⇨	B = 2

Nu e originală, desigur. Mulţi copii (şi adulţi) folosesc trucuri de felul ăsta ca să memoreze toate cifrele lui π. Dar mă tulbură faptul că azi Gaia ştie mai multe cifre ale lui π decât Arhimede.

Şi, mai ales, că nu i-a trecut prin cap să-şi inventeze o poezioară ca să ţină minte primele cifre ale lui $\sqrt{2}$ sau $\sqrt{3}$ sau $\sqrt{5}$ S-a gândit la π.

Dacă Georg Cantor confirmă că povestea lui π nu s-a încheiat, fiică-mea îmi confirmă că şi fascinaţia pentru numărul al cărui nume s-a întâmplat să-l port e fără de sfârşit.

Nici un alt număr n-a dobândit celebritatea (matematică și nu numai) de care se bucură numărul π, raportul dintre circumferința unui cerc și diametrul lui. Urmărindu-i destinul încă din antichitatea egipteană și mesopotamiană, Pietro Greco ajunge să refacă, la nivelul evoluției conceptelor, o bună parte din istoria matematicii, în care apare personaje marcante: Arhimede, Newton, Euler, Cantor. Și, în același timp, autorul surprinde cu finețe poezia de care se înconjoară acest număr care de milenii ne stimulează imaginația.


ISBN 978-973-50-6554-6